ANALYSE

Maths Sup

NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUES SUPERIEURES

Par M Leconte : Professeur agrégé au Lycée Corneille à Rouen

TOME 2

ANALYSE

Deuxième Edition
BIBERT
Canteleu : 1964

I Topologie de R

1 Ensemble borné de reels:

Soit un ensemble non vide E de reels. E est majoré par α, c'est à dire $\forall x \in E \quad x \leq \alpha$. On effectue une partition des rationels en deux classes C_1 et C_2 de la façon suivante: C_1 comportant les rationnels qui ne sont pas majorants de E, C_2 comportant les rationnels qui sont majorants de E. C_1 et C_2 determinent une coupure, d'ou un reel M qu'on notte par convention $M = [C_1 \; C_2]$.

(i) M est un majorant de E: Sinon il existerait un element de E superieur à M : $x \in E \quad x > M$ donc il existerait $p \in Q \quad M < p < x$ et p appartiendrait à C_2. Or $p < x \Rightarrow p \in C_1$ ce qui est contradictoire.

(ii) M est le plus petit majorant de E: Sinon il existerait un element M', lui même majorant tel que $M' < M$ Mais alors il existerait $p' \in Q \quad M' < p' < M$. $p' > M'$ serait majorant de E. d'où $p' \in C_2$. $p' < M \Rightarrow p \in C_1$. ce qui est contradictoire.

Donc $\quad \forall \varepsilon \in R^+ \; \exists x \in E \quad x > M - \varepsilon$

M s'appelle la borne superieure de E. On definit de la même maniere la borne inferieure d'un ensemble E minoré.

Si E admet une borne supérieure et inférieure on dit alors que E est <u>borné</u>

2 Points d'accumulations:

E un ensemble de reel admet $a \in R$ (appartenant ou non à E) comme <u>point d'accumulation</u> si tout intervalle ouvert de centre a contient un point de E autre que a.

Soit $\forall \varepsilon \in R^+ \; \exists x_1 \in E \; x_1 \neq a \quad x_1 \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$

Soit $\varepsilon_1 = |a-x_1|$, l'intervale $]a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1[$ contient un point x_2 $x_2 \in E$ $x_2 \neq a$, soit alors $\varepsilon_2 = |a-x_2|$.... et ainsi de suite indefiniment. E contient donc une infinite d'element.

" Un ensemble fini, du point de vue du nombre de ses elements, n'admet pas de point d'accumulation".

3 Theoreme de Bolzanno-Weierstraß:

Soit E un ensemble de reel contenant une infinité d'elements. Il admet au moins un point d'accumulation. En effet, repartissons les rationnels en 2 classes C_1 et C_2 C_1 comprenant les rationnels inferieurs à un nombre infini d'elements distincts de E, C_2 comprenant les rationnels inferieurs à un nombre fini eventuellement nul d'elements distincts de E. Montrons que nous avons une coupure.

- C_1 et C_2 ne sont pas vides: C_1 contenant les rationnels inferieurs à un minorant de E, C_2 contenant les rationnels superieurs à un majorant de E.

- Les axiomes 2 3 4 5 sont triviaux.

Nous definissons un réel a.

$$\forall \varepsilon \in R^+ \left| \begin{array}{l} \exists \rho \in Q \quad a-\varepsilon < \rho < a \\ \exists \rho' \in Q \quad a < \rho' < a+\varepsilon \end{array} \right.$$

ρ est un rationnel $< a$ donc ρ appartient à la classe de gauche C_1 de la coupure : $\rho \in C_1$. Il existe un nombre infini d'éléments de E superieur ρ et par suite à $a-\varepsilon$. De même $\rho' \in C_2$: il n'existe qu'un nombre fini d'elements de E superieur à ρ' et par suite à $a+\varepsilon$. L'intervalle $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ contient une infinité d'elements distincts de E donc un qui est different de a. a est un point d'accumulation.

4 Definitions:

L'ensemble des points d'accumulation de E s'appelle le derive de E. On le notte E'. E est fermé s'il contient son derivé. Ainsi l'intervale $[a.b]$, $[a.b] = \{x \quad x \in R \quad a \leq x \leq b\}$ est un ensemble fermé. On l'appelle un segment. Un point a est dit adhérent à E si tout intervale ouvert de centre a contient un point de E (pas necessairement autre que a) L'ensemble des points adherents à E est l'adherence $\bar{E}$ de E. Si $E = \bar{E}$ E est fermé, inversement si E est fermé $E' \subseteq E$ donc $E \cup E' \subseteq E \cup E = E$ or $E \cup E' = \bar{E} \Rightarrow E = \bar{E}$

On appelle point isolé de E, tout point de E n'appartenant pas à E'.

5 Ensembles adjacents :

Deux ensembles non vide E_1 et E_2 sont adjacents si ① $\forall x_1 \in E_1 \ \forall x_2 \in E_2 \quad x_1 < x_2$

② $\forall \varepsilon \in R^+ \ \exists x_1 \in E_1 \ \exists x_2 \in E_2 \quad x_2 - x_1 < \varepsilon$

E est majorée par un élément quelquanque $\xi_2 \in E_2$, comme tout ensemble de reel majorée admet une borne superieure, soit μ_1 la borne superieure de E_1. Soit de la meme façon μ_2 la borne inferieure de E_2. Prouvons que $\mu_2 \geqslant \mu_1$. Si cette condition n'etait pas realisée, on aurait $\mu_2 < \frac{\mu_2 + \mu_1}{2} < \mu_1$. Il existerait donc α_1 et α_2 tels que $\alpha_1 \in E_1 \quad \frac{\mu_2 + \mu_1}{2} < \alpha_1 < \mu_1$ et $\alpha_2 \in E_2$ $\mu_2 < \alpha_2 < \frac{\mu_2 + \mu_1}{2}$ Soit $\alpha_2 < \alpha_1$ ce qui est contradictoire (1)

Prouvons que $\mu_2 = \mu_1$: Sinon on aurait $\mu_1 < \mu_2$. Il existerait $\partial_1 \in E_1 \quad \partial_1 < \mu_1$; $\partial_2 \in E_2 \quad \partial_2 > \mu_2$. Soit : $\partial_1 < \mu_1 < \mu_2 < \partial_2$. D'apres l'axiome (II) on pourrait choisir ∂_1 et ∂_2 tel que $\partial_2 - \partial_1 < \mu_2 - \mu_1$. or $\partial_2 - \partial_1 > \mu_2 - \mu_1$ ce qui est contradictoire.

E_1 et E_2 ont donc une borne commune $\mu = \mu_1 = \mu_2$

6 Topologie de R^n

Etant donné un ensemble E, on appelle distance sur E une application de E^2 dans $R^+ \cup \{0\}$ satisfaisant aux trois axiomes suivant.

① Axiome de separation : $\delta(x . y) = 0 \Longleftrightarrow \quad x = y$

② Axiome de symetrie $\quad \delta(x y) = \delta(y . x)$

③ $\quad \delta(x . z) \leq \delta(x \ y) + \delta(y . z)$

Munie de la distance δ, E devient l'espace metrique $(E\ \delta)$
A un ensemble donné E correspond autant d'espace metrique que de fonction δ.
Deux metriques sur E sont dites <u>equivalentes</u> si :

$$\forall \varepsilon \in R^+ \ \exists \eta \in R^+ \ \left| \begin{array}{l} \delta(a,x) < \eta \Rightarrow \delta'(a.x) < \varepsilon \\ \delta'(a,x) < \eta \Rightarrow \delta(a,x) < \varepsilon \end{array} \right.$$

<u>Exemple</u>: Sur R^n les deux metriques definies par $\delta(x.y) = \sup |x_i - y_i|$ et $\delta'(x.y) = \left[\sum_1^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}$ sont equivalentes.

En effet: $\sup |x_i - y_i| < \eta \Rightarrow \left[\sum_1^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2} < \varepsilon$

$$\Rightarrow \sum_1^n (x_i - y_i)^2 < \varepsilon^2$$

Il suffit que $n\left[\sup |x_i - y_i|\right]^2 < \varepsilon^2$ soit $\sup |x_i - y_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$
On choisira $\eta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.
Inversement $\left[\sum_1^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2} < \eta \Rightarrow \sup |x_i - y_i| < \varepsilon$

$$\sum_1^n (x_i - y_i)^2 < \eta^2 \Rightarrow (x_i - y_i)^2 < \eta^2 \quad \forall i \in \{1 \dots n\}$$

$$\Rightarrow |x_i - y_i| < \eta \quad \forall i \in \{1 \dots n\}$$

$$\Rightarrow \sup |x_i - y_i| < \eta.$$

On choisira $\eta = \varepsilon$

<u>NB</u>: La metrique $\delta'' = \sum_1^n |x_i - y_i|$ est encore une metrique équivalente aux deux premières.

La relation ainsi definie, entre metriques sur E, est une relation d'equivalence. Chaque classe s'appelle une <u>topologie</u>.

7 <u>Notion topologique</u>:

On appelle <u>boule ouverte</u> de centre a dans R^n

l'ensemble des x tels que la distance euclidienne soit inferieur à ρ. ρ etant le rayon de la boule

$x \in R^n \quad \left[\sum_i^n (a_i - x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \rho$

On appelle cube ouvert de centre a dans R^n l'ensemble des x tels que $\quad x \in R^n \quad \sup |a_i - x_i| < \rho$

2ρ est l'arête du cube.

L'équivalence des deux metriques considerés permet d'affirmer que toute boule ouverte de centre a est interieur à un cube concentrique et inversement.

Ceci posé les notions de points d'accumulations, d'adhèrence, de derivé s'etendent à R^n ainsi que le theoreme de Bolzano-Weierstraß. Il suffit de remplacer dans les demonstrations les intervalles par des cubes et des boules ouvertes. Toutes les notions sont topologiques.

Limites.

8 Limites finies:

f étant définie sur $]a-\alpha, a+\alpha[$ sauf peut être en a on dit que $f(x)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a si:

$$\boxed{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \eta \in \mathbb{R}^+ \quad |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon}$$

La limite ℓ est unique : sinon soit ℓ' une autre limite. En supposant $\ell' > \ell$ on peut écrire $\ell' - \ell = 2\lambda$.
Il existerait alors η_1 et η_2 tels que :

$$|x-a| < \eta_1 \Rightarrow \ell - \lambda < \underline{f(x) < \ell + \lambda} \qquad (1)$$
$$|x-a| < \eta_1 \Rightarrow \underline{\ell' - \lambda < f(x)} < \ell' + \lambda \qquad (2)$$

En posant $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$:

$$|x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > \frac{\ell + \ell'}{2} \quad \text{et} \quad f(x) < \frac{\ell + \ell'}{2}$$ ce qui est contradictoire.

9 Théorèmes

$$\boxed{\begin{array}{l} (1) \quad \text{Si } f_1(x) \to \ell_1 \ , \ f_2(x) \to \ell_2 \quad \text{quand } x \to a \\ f_1(x) + f_2(x) \to \ell = \ell_1 + \ell_2 \end{array}}$$

En effet: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \eta_1 \in \mathbb{R}^+ \ |x-a| < \eta_1 \Rightarrow |f_1(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists \eta_2 \in \mathbb{R}^+ \ |x-a| < \eta_2 \Rightarrow |f_2(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$

on posant $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$

$$|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq |f_1(x) - \ell_1| + |f_2(x) - \ell_2| < \varepsilon$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (2) \quad \text{Si } f_1(x) \to \ell \text{ quand } x \to a \text{, si } \varphi = \alpha f \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ \varphi(x) \to \alpha \ell \end{array}}$$

En effet si $\alpha \neq 0$:

$$\forall \varepsilon \in R^+ \; \exists \eta \in R^+ \; |x-a|<\eta \Rightarrow |f(x)-\ell| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

d'où $|\varphi(x)-\alpha\ell| = |\alpha|\,|f(x)-\ell| < \varepsilon$.

Si $\alpha = 0$ le théorème est trivial.

$$\boxed{\text{(III) Si } |f_1(x)| < M \text{ , } f_2(x) \to 0 \text{ quand } x \to a \quad f_1(x)\, f_2(x) \to 0}$$

En effet: $\forall \varepsilon \in R^+ \; \exists \eta \in R^+ \; |x-a|<\eta \Rightarrow |f_2(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$

Dès lors $|f_1(x)\; f_2(x)| < \varepsilon$

Application: $\boxed{\text{Si } f_1(x) \to \ell \text{ et } f_2(x) \to 0 \text{ quand } x \to a. \quad f_1(x)\, f_2(x) \to 0}$

car $\forall \lambda \in R^+ \; \exists \eta_1 \in R^+ \; |x-a|<\eta_1 \Rightarrow |f_1(x)-\ell_1| < \lambda$

d'où $|f_1(x)| < |\ell_1| + \lambda = M$. Le théorème précédent s'applique

$$\boxed{\text{(IV) Si } f_1(x) \to \ell_1 \;\; f_2(x) \to \ell_2 \text{ quand } x \to a \quad f_1(x)\, f_2(x) \to \ell_1 \ell_2.}$$

En effet $f_1(x) f_2(x) - \ell_1\ell_2 = \underbrace{f_1(x)\big[\underbrace{f_2(x)-\ell_2}_{\downarrow 0}\big] + \ell_2\big[\underbrace{f_1(x)-\ell_1}_{\downarrow 0}\big]}_{\downarrow 0}$

$$\boxed{\text{(V) Si } |f_1(x)| > m > 0 \text{ , si } f_2(x) \to 0 \text{ quand } x \to a \quad \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \to 0 .}$$

En effet: $\forall \varepsilon \in R^+ \; \exists \eta \in R^+ \; |x-a|<\eta \Rightarrow |f_2(x)| < \varepsilon m$

d'où $\left|\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right| < \varepsilon$

Application: $\boxed{\text{Si } f_1(x) \to \ell_1 \neq 0 \;\; f_2(x) \to 0 \text{ quand } x \to a \quad \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \to 0}$

car $\exists \eta_1 \in R^+ \; |x-a|<\eta_1 \Rightarrow |f_1(x)-\ell_1| < \frac{|\ell_1|}{2}$

d'où $|f_1(x)| > \frac{|\ell_1|}{2}$

(VI) $\boxed{\text{Si } f_1(x) \longrightarrow \ell_1 \neq 0 \quad \text{Si } f_2(x) \longrightarrow \ell_2 \text{ qd } x \to a \quad \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} \longrightarrow \dfrac{\ell_2}{\ell_1}}$

En effet : $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} - \dfrac{\ell_2}{\ell_1} = \dfrac{\ell_1 f_2(x) - \ell_2 f_1(x)}{\ell_1 f_1(x)} \longrightarrow 0$

(VII) $\boxed{\text{Si } f(x) \longrightarrow \ell > 0 \quad \sqrt[n]{f(x)} \longrightarrow \sqrt[n]{\ell}}$

Posons $u(x) = \sqrt[n]{f(x)}$, $\lambda = \sqrt[n]{\ell}$ $\quad \dfrac{f(x)}{\ell} \longrightarrow 1$

Donc $\forall \varepsilon \in R^+ \ \exists \eta \in R^+ \ |x-a| < \eta \Rightarrow 1 - \varepsilon < \dfrac{f(x)}{\ell} < 1 + \varepsilon$

Choisissons $\varepsilon < 1$, alors $(1-\varepsilon)^n = (1-\varepsilon)(1-\varepsilon)^{n-1} < (1-\varepsilon)$

$$(1+\varepsilon)^n = (1+\varepsilon)(1+\varepsilon)^{n-1} > (1+\varepsilon)$$

$$(1-\varepsilon)^n < \frac{f(x)}{\ell} < (1+\varepsilon)^n$$

Donc $\quad 1 - \varepsilon < \dfrac{u(x)}{\lambda} < 1 + \varepsilon$

$$\frac{u(x)}{\lambda} \longrightarrow 1 \quad \text{donc} \quad u(x) \longrightarrow \lambda$$

(VIII) La limite eventuelle d'une fonction positive ou nulle est positive ou nulle.

Sinon il existerait $\eta \in R^+$ $|x-a| < \eta \Rightarrow |x - \ell| < |\ell|$ d'où $f(x) < 0$ ce qui est contradictoire. Il en resulte que si $f(x) \geq g(x)$ $\quad f(x) \to \ell \quad g(x) \longrightarrow \ell'$ alors $\ell \geq \ell'$.

10 Limites infinies:

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si : $\forall A \in R \ \exists \eta \in R^+ \ |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > A$

Théoreme:

① $\boxed{\text{Si } f_1(x) \longrightarrow +\infty \quad f_2(x) < M \quad f_1(x) + f_2(x) \longrightarrow +\infty}$

En effet : $\forall A \in R \ \exists \eta \in R^+ \ |x-a| < \eta \Rightarrow f_1(x) > A - M$

D'où : $f_1(x) + f_2(x) > A$

En particulier: $\boxed{\text{si } f_1(x) \to +\infty \quad f_2(x) \to \ell \quad f_1(x) + f_2(x) \to +\infty}$

(ii) $\boxed{f_1(x) \to +\infty \quad f_2(x) \to +\infty \quad f_1(x) + f_2(x) \to +\infty}$

En effet: $\forall A \in R \; \exists \eta_1 \in R^+ \; |x-a| < \eta_1 \Rightarrow f_1(x) > \frac{A}{2}$

$\exists \eta_2 \in R^+ \; |x-a| < \eta_2 \Rightarrow f_2(x) > \frac{A}{2}$

en choisissant $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2) \Rightarrow f_1(x) + f_2(x) > A$

(iii) $\boxed{f_1(x) \to +\infty \quad f_2(x) > M > 0 \quad f_1(x) \cdot f_2(x) \to +\infty}$

En effet: $\forall A \in R \; \exists \eta \in R^+ \; |x-a| < \eta \Rightarrow f_1(x) > \frac{A}{M}$

d'où $f_1(x)\, f_2(x) > A$

En particulier si $\boxed{f_1(x) \to +\infty \quad f_2(x) \to \ell > 0 \quad f_1(x) f_2(x) \to +\infty}$

(iv) $\boxed{\text{Si } f(x) \to +\infty \quad \sqrt[m]{f(x)} \to +\infty}$

En effet: $\forall A \in R \; \exists \eta \in R^+ \; |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > A^m$

d'où $\sqrt[m]{f(x)} > A$

<u>NB</u>: On dit que $f(x) \to -\infty$ quand $x \to a$ si $-f(x) \to +\infty$. On se ramene ainsi au cas precedent.

II Cas ou x tend vers $+\infty$

(i) $f(x) \to \ell$ quand $x \to +\infty$ si:
$\forall \varepsilon \in R^+ \; \exists B \in R \quad x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

(ii) $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ si:
$\forall A \in R \; \exists B \in R \quad x > B \Rightarrow f(x) > A$

<u>NB</u>: Tous les théoremes etablis sont encore valable. Il suffit de remplacer dans les démonstrations.
$\exists \eta \in R^+ \; |x-a| < \eta$ par $\exists B \in R \quad x > B$
et $\inf(\eta_1, \eta_2)$ par $\sup(B_1, B_2)$

12 Remarques :

(I) Lorsque $x \to a$ en restant supérieur à a on écrit $x = a+0$

$x \to a$ en restant inférieur à a on écrit $x = a-0$.

La limite éventuelle de $f(x)$ s'appelle alors limite à droite de $f(x)$ (resp : gauche).

(II) On appelle voisinage de a toute partie de R contenant un intervalle ouvert de centre a, de $+\infty$ toute partie de R contenant un intervalle ouvert $]A\ +\infty[$, de $-\infty$ toute partie de R contenant un intervalle ouvert $]-\infty\ A[$

On peut dire en appelant $\overline{R}$ l'ensemble obtenu en complétant R par $+\infty$ et $-\infty$ que $f(x) \to l \in \overline{R}$ s'il existe un voisinage $V(a)$ tel que $x \in V(a) \Rightarrow f(x) \in V(l)$ $\forall V(l)$

13 Fonction monotone bornée :

Soit I un intervalle ouvert $]a\ b[$ a et b étant finis ou infinis. Soit $f(x)$ une fonction non décroissante définie sur I et majorée par k. L'ensemble de ses valeurs est borné supérieurement. Soit l la borne supérieure finie : $\forall \varepsilon \in R^+\ \exists x_0 \in I\ \ f(x_0) > l - \varepsilon$. C'est à dire

$$\forall x \in]x_0\ b[\quad f(x) \geq f(x_0) > l - \varepsilon$$

Soit $l - \varepsilon < f(x) \leq l$. On peut donc choisir un voisinage de b $V(b) =]x_0\ b[$ tel que :

$$x \in V(b) \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) \leq l$$

En d'autre terme : $f(x) \to l - 0$ quand $x \to b - 0$

NB : Théorème analogue pour une fonction non croissante minorée.

14 Suite :

Une *suite* $\{u_n\}$ est une fonction definie sur N. Elle est *convergente* si u_n tend vers une limite finie ℓ quand n tend vers $+\infty$. c'est à dire que si :

$$\forall \varepsilon \in R^+ \quad \exists n_0 \in N \quad n > n_0 \rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Dans tous les autres cas $\{u_n\}$ est dite *divergente* sur R. Tous les theoremes sur les limites finies ou infinies ainsi que le § 13 est valable pour les suites. (Remplacer B par n_0 dans les demonstrations, soit $x > B$ par $n > n_0$)

15 Suites adjascentes.

Deux suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont dites *adjascentes* si $\{u_n\}$ est non decroissante, $\{v_n\}$ non croissante et si $v_n - u_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$

Comme $(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leq 0$ la suite $\{v_n - u_n\}$ est non croissante. Elle tend vers 0 par valeurs superieures ; en d'autres termes: $v_n \geq u_n$ ceci posé, en vertu de cette inegalité, $\{u_n\}$ est majoré par l'un quelconque des v_n. D'après le § 13 elle admet une limite finie ℓ. De même $\{v_n\}$ admet une limite finie ℓ'. Enfin $v_n - u_n \rightarrow \ell' - \ell = 0$. Donc $\ell = \ell'$

16 Critere de Cauchy :

Soit une suite convergente $\{u_n\}$ et ℓ sa limite. Dire que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$, c'est dire:

$$\forall \varepsilon \in R^+ \ \exists n_0 \in N \quad p, q > n_0 \Rightarrow |u_p - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$|u_q - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

soit $\forall \varepsilon \in R^+ \ \exists n_0 \in N \quad p.q > n_0 \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$

<u>Réciproquement</u>: Si la suite $\{u_n\}$ vérifie cette condition elle est convergente. C'est la condition de Cauchy.

En effet: faisons $q = n_0+1$. $p > n_0 \Rightarrow u_{n_0+1} - \varepsilon < u_p < u_{n_0+1} + \varepsilon$

La suite $\{u_n\}$ est donc borné à partir du rang n_0+1. Si $\{u_n\}$ ne prend qu'un nombre fini de valeur distincte, l'une de ces valeurs, soit ℓ, est prise une infinité de fois, sinon on a un ensemble borné comprenant une infinite d'éléments, il existe au moins un point d'accumulation. Dans les deux cas ℓ est élément de $[u_{n_0+1} - \varepsilon, u_{n_0+1} + \varepsilon]$ et alors pour $n > n_0$ $|u_n - \ell| < 2\varepsilon$ $\forall \varepsilon$. ℓ est donc point limite et c'est le seul.

17 <u>Ensemble complet</u>:

Un ensemble de reel E est <u>complet</u> si toute suite reguliere de point de E converge vers un point de E.

(R est un ensemble complet, Q ne l'est pas). A tout reel x on peut associer l'ensemble des suites regulières de rationnels convergeant vers x. Deux telles suites verifient la relation d'equivalence $\mathcal{R}$ definie par:

$$\forall \varepsilon \in Q^+ \ \exists n_0 \in N \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - v_n| < \varepsilon$$

A chaque reel x peut donc être associé la classe d'équivalence de ces suites

<u>Remarque</u>: On montre inversement que R est isomorphe à $\frac{U}{\mathcal{R}}$, U designant l'ensemble des suites regulieres de rationnels.

c'est à dire que correspondance $R \hookrightarrow \frac{U}{\mathcal{R}}$ introduite est bijective et qu'il est possible de définir sur $\frac{U}{\mathcal{R}}$ une structure isomorphe à celle de R.

18 Suites et fonctions.

Si $f(x) \longrightarrow \ell$ quand $x \to a \in R$ et si $\{x_n\}$ est une suite qui converge vers a, la suite $\{f(x_n)\}$ converge vers ℓ, car $\forall \varepsilon \in R^+ \; \exists \eta \in R^+ \; |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$$\exists n_0 \in N \quad n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \eta$$

D'où $n > n_0 \Rightarrow |f(x_n) - \ell| < \varepsilon$

Réciproquement:

Si $\forall \{x_n\} \to a$, $\{f(x_n)\} \longrightarrow \ell$ alors $f(x) \to \ell$ quand $x \to a$

Sinon il existerait $\varepsilon_0 \in R^+$ tel que dans tout interval $]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$ on puisse trouver au moins un point x_n tel que $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon_0$. La suite $\{x_n\}$ convergerait alors vers a tandis que la suite $\{f(x_n)\}$ ne convergerait pas vers n.

19 Limite sur R^n

a étant un point de R^n, on appelle voisinage $v(a)$ de a toute partie de R^n contenant une boule ou cube ouvert de centre a. Si f est une application de R^n dans R^p ou $\overline{R}$ on dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a si à tout voisinage $v(\ell)$ on peut associer $v(a)$ dans R^n tel que $x \in v(a) \Rightarrow f(x) \in v(\ell)$

On dit qu'une suite de points de R^n converge vers a si à tout $v(a)$ on peut associer $n_0 \in N$ tel que $n > n_0 \Rightarrow u_n \in v(a)$.

NB : Pour les suites et fonctions sur C on identifie C à R^2. Tous les théorèmes sont encore valables, sauf ceux où intervient la relation d'ordre (cf § 13).

. Remplacer partout $|x-y|$ par $d(x,y)$ (d étant l'une des métriques naturelles sur R_n)

. L'étude d'une suite sur R^n se ramène à celle des suites sur R formées par les composantes de même rang.

Continuité

20 Définition : - Continuité en un point.

Soit f une fonction réelle de x définie sur un voisinage de x_0 dans R. Elle est dite continue en x_0 (resp : à droite de x_0, à gauche de x_0) si $f(x)$ tend vers x_0 quand x tend vers x_0 (resp x_0+0 x_0-0).

- Chaque théorème sur les limites fournit un théorème sur la continuité en x_0.

- Continuité sur un segment :

Une fonction f définie sur $[a,b]$ est dite continue sur $[a,b]$ si elle est continue en tous points de $]ab[$, à droite de a et à gauche de b.

- Continuité uniforme :

Une fonction f définie sur $[a,b]$ est dite uniformément continue sur $[ab]$ si :

$$\forall \varepsilon \in R^+ \ \exists \eta \in R^+ \quad |x'-x''| < \eta \Rightarrow |f(x')-f(x'')| < \varepsilon$$

La continuité uniforme entraîne la continuité en tous points de $[ab]$: (faire $x''=x_0$) Mais la réciproque n'est pas exacte.

21 Exemples :

En tout point $x_0 \in R$ $a_n x^n$ est continue comme produit.

donc $\quad P(x) = \sum_0^n a_i x^i$ est continue comme somme.

- En tout point x_0 qui n'est pas pole, la fonction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ est definie comme quotient.

- Si $y = f(x)$ est continue en x_0 et si $g(y)$ est continue en $y_0 = f(x_0)$ alors la fonction composée $g[f(x)]$ est continue en x_0.

En effet: $\forall \varepsilon \in R^+ \; \exists \eta_1 \in R^+ \; |y - y_0| < \eta_1 \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$

Or $\forall \varepsilon' \in R^+ \; \exists \eta_2 \in R^+ \; |x - x_0| < \eta_2 \Rightarrow |y - y_0| < \varepsilon^2$

on choisit donc $\varepsilon' = \eta_1$

NB: La demonstration s'étend à la continuité uniforme en mettant x' et x'' à la place de x et x_0 et y' et y'' à la place de y et y_0.

- La fonction $y = \sin x$ est uniformement continue sur R car $|\sin x' - \sin x''| < \varepsilon$ s'écrit encore:

$2 \left|\sin \frac{x' - x''}{2}\right| \left|\cos \frac{x + x''}{2}\right| < \varepsilon$. Pour assurer cette inégalité il suffit d'assurer. $2 \left|\sin \frac{x' - x''}{2}\right| < \varepsilon$.

Or $\left|\sin \frac{x' - x''}{2}\right| \leq |x' - x''|$. Il suffit en définitive d'assurer $|x' - x''| < \varepsilon$

- De même $\cos x$ est uniformement continue sur R.

22 Theorèmes:

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

① A tout $\varepsilon \in R^+$ on peut associer une subdivision de $[ab]$ en un nombre fini de sous segment tel que pour tout couple de point x' x'' appartenant à un même sous segment $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Sinon la decomposition serait impossible pour l'un au moins des deux segments: $[a \; \frac{a+b}{2}]$ $[\frac{a+b}{2} \; b]$

Soit $[a_1\ b_1]$ ce segment : elle serait impossible pour l'un au moins des segments $[a_1\ \frac{a_1+b_1}{2}][\frac{a_1+b_1}{2}\ b_1]$

Soit $[a_2\ b_2]$ ce segment : ... et ainsi de suite.

On obtient une suite de segments emboîtés $[a_n\ b_n]$ tel que $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Quand $n \to +\infty$, $2^n \to \infty$, $b_n - a_n \to 0$. La suite $\{a_n\}$ est non decroissante, $\{b_n\}$ est non croissante. Ces deux suites sont adjacentes : elles ont une limite commune ξ.

f étant continue en ξ :

$$\forall \varepsilon \in R^+ \ \exists \eta \in R^+ \quad |x-\xi| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Or on peut choisir n_0 : $b_{n_0} - a_{n_0} < \eta$. Des lors :

$\xi - \eta < a_{n_0} \leq \xi \leq b_{n_0} < \xi + \eta$. et :

$\forall x' x'' \in [a_{n_0}\ b_{n_0}]$ $|x' - \xi| < \eta$ et $|x'' - \xi| < \eta$

D'où $|f(x') - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|f(x'') - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$

soit $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Il y a contradiction.

(11) Theoreme de Heine : f est uniformement continue sur $[a\ b]$.

En effet : $\forall \varepsilon \in R^+$ Il existe une subdivision de $[a, b]$ en un nombre fini de sous segment tel que $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout couple $x' x''$ de points d'un même sous segment.

Soit $x_0 = a, x_1, \ldots\ldots, x_n = b$ les points de cette subdivision. Posons $\eta = \inf (x_i - x_{i-1})$. Si $|x' - x''| < \eta$ x' et x'' appartiennent à un même sous segment ou à deux segments consecutifs. (Cas (I) et (II)).

(I) $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$

(II) $\left.\begin{array}{l} |f(x') - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |f(x_i) - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right| \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

(III) <u>f est borné sur $[a,b]$</u>

En effet considérant la même subdivision :

$x \in [a\ x_1] \Rightarrow |f(x)| < |f(a)| + \frac{\varepsilon}{2}$

$x \in [x_1\ x_2] \Rightarrow |f(x)| < |f(a)| + 2\frac{\varepsilon}{2}$

. . . .

$x \in [x_{i-1}\ x_i] \Rightarrow |f(x)| < |f(a)| + i\frac{\varepsilon}{2}$

. . . .

$x \in [x_{n-1}\ b] \Rightarrow |f(x)| < |f(a)| + n\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall x \in [b\ a] \quad |f(x)| < |f(a)| + n\frac{\varepsilon}{2}$

ε ayant été fixé, $f(x)$ est donc borné. Nous appellerons <u>bornes</u> de la fonction sur $[a,b]$:

$$M = \sup(f(x) \qquad m = \inf(f(x))$$

(IV) <u>f atteint effectivement ses bornes sur $[a,b]$</u>.

Sinon il n'existerait aucun $x \in [ab]$ tels que $f(x) = M$ or M est la borne supérieure de $f(x)$ sur l'un au moins des segments $[a\ \frac{a+b}{2}][\frac{a+b}{2}\ b]$. Supposons que ce soit $[a_1\ b_1]$. .... On construit ainsi une suite de segments emboîtés $[a_n\ b_n]$ tels que M soit la borne supérieure de x sur $[a_n\ b_n]$. $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont adjacentes et ont une limite commune ξ, $f(\xi) < M$. Posons :

$\varepsilon_1 = M - f(\xi)$ et soit $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Dans ces conditions : $f(\xi) < M - \varepsilon$. On peut associer à ε, $n_0 \in N$ tel que $x \in [a_{n_0}\ b_{n_0}] \Longrightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ en vertu du théorème de Heine. On a donc $f(x) < M - \varepsilon_2$ en posant $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon$. M ne serait pas la borne supérieure de $f(x)$ sur $[a_{n_0}\ b_{n_0}]$ ce qui est contradictoire. (Même démonstration pour la borne inférieure)

Ⓥ <u>Si $f(a)f(b) < 0 \quad \exists c \in]a\,b[\ ,\ f(c) = 0$</u>

Sinon $f(x)$ ne s'annulerait en aucun point de $[a,b]$. Il existe un et un seul des deux segments $[a\ \frac{a+b}{2}]$ $[\frac{a+b}{2}\ b]$ soit $[a_1 b_1]$ tel que $f(a_1)\cdot f(b_1) < 0$ ....
On construit ainsi une suite de segments emboittés $[a_n\ b_n]$ tel que $f(a_n)\,f(b_n) < 0$. Soit ξ la limite des suites adjacentes $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$. $f(\xi) \neq 0$.
Soit $0 < \varepsilon < |f(\xi)|$. D'apres Heine on peut associer à ε $n_0 \in N$ tel que: $x \in [a_{n_0}\ b_{n_0}] \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$.
Par conséquent $f(a_{n_0}), f(b_{n_0})$ seraient du même signe que $f(\xi)$ ce qui est contradictoire.

Ⓥⓘ <u>Theoreme des valeurs intermédiaires.</u>
<u>Si $m < k < M \quad \exists c \in]a,b[\quad f(c) = k$.</u>
$\varphi(x) = f(x) - k$. D'apres Ⓘⓥ il existe deux points de $[a b]$ en lesquelles f prend les valeurs m et M. Soit α le plus petit et β l'autre. On a $\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta) < 0$.
φ étant continu sur $[\alpha\ \beta]$ donc $\exists c \in [\alpha\ \beta]\ \varphi(c) = 0$
Donc $f(c) = k$

23 <u>Inversion d'une fonction continue et strictement monotone sur un segment.</u>
Soit f une telle fonction que nous supposerons, continue et strictement croissante sur $[a,b]$.
$\forall y \in [f(a), f(b)] \quad \exists x \in [a,b] \quad f(x) = y$
L'application de $[a,b]$ dans $[f(a)\ f(b)]$ définie par f est donc surjective ; $f(x)$ est unique car $x' > x \Rightarrow f(x') > f(x)$. L'application est donc injective.

par suite elle est bijective. On définit ainsi une application réciproque $\overset{-1}{f}$ $[f(a).f(b)]$ sur $[a,b]$.
et $y = \overset{-1}{f}(x) \iff x = f(y)$.

* $\overset{-1}{f}$ est strictement croissante sur $[f(a)\ f(b)]$ car:
$\forall\, x'x'' \in [f(a)\ f(b)]$ $\quad \dfrac{\overset{-1}{f}(x') - \overset{-1}{f}(x'')}{x'-x''} = \dfrac{y'-y''}{f(y')-f(y'')} > 0$
* $\overset{-1}{f}$ est continue sur $[f(a)\ f(b)]$. En effet:
Si $f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0+\varepsilon)$ avec $f(x) = y$
alors $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ (d'après la croissante de $\overset{-1}{f}$)
soit alors $y_0 = f(x_0)$ et $\eta = \inf[f(x_0+\varepsilon) - y_0,\ y_0 - f(x_0-\varepsilon)]$

$$
\begin{aligned}
|y-y_0| < \eta &\Rightarrow f(x_0-\varepsilon) < y < f(x_0+\varepsilon)\\
&\Rightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\\
&\Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

24 Extension:

Si f est continue en tout point du semi-segment $[a, b[$ et croissante. et si $f(x) \longrightarrow \infty$ quand $x \to b-0$
A tout $y \geqslant f(a)$ correspont un point x et un seul du segment $[a,b[$ tel que $f(x) = y$.
En effet soit $y \geqslant f(a)$ choisissons $A > y$.

$$\exists\, \eta \in \mathbb{R}^+ \quad b-\eta < x < b \Rightarrow f(x) > A$$

Soit β tel que $b - \eta < \beta < b$: sur le segment $[a\ \beta]$ f est continue et strictement croissante: Il existe x unique appartenant à $[a\ \beta]$ tel que $f(x) = y$
Par ailleurs sur l'intervale $[\beta\ b[$ il n'existe pas de point x tels que $f(x) = y$. Finalement il existe un x et un seul sur $[a b]$ tel que $f(x) = y$.
On peut dire que $\overset{-1}{f}$ applique $[f(a), +\infty[$ sur $[a,b[$

Resultat analogue quand $f(x) \to -\infty$ qd $x \to a+0$
$f(x) \to +\infty$ qd $x \to +\infty$

25 <u>Exemples:</u>

① La fonction $x \xrightarrow{f} \sin x$ est strictement croissante et continue sur le segment $\left[-\frac{\pi}{2}\ +\frac{\pi}{2}\right]$.
Elle definit donc une fonction reciproque:

$$x \xrightarrow{f^{-1}} \text{Arc}\sin x$$

Soit:
$$\boxed{\begin{matrix} y = \text{Arc}\sin x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{matrix}}$$

⑪ De même $x \xrightarrow{f} \cos x$ est inversible sur $[0\ \pi]$

$$\boxed{\begin{matrix} y = \text{Arc}\cos x \\ -1 \leq x \leq +1 \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} x = \cos y \\ 0 \leq x \leq \pi \end{matrix}}$$

⑪ De même $x \xrightarrow{f} \text{tg}\, x$ est inversible sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ +\frac{\pi}{2}\right[$

$$\boxed{\begin{matrix} y = \text{Arc}\,\text{tg}\, x \\ -\infty < x < +\infty \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} x = \text{tg}\, y \\ -\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2} \end{matrix}}$$

26 <u>Continuité sur R^n:</u>

La définition de la continuité, simple ou uniforme s'etend à une application $R^n \to R^p$
Les distances naturelles sur R^n remplacant la distance sur R.
Le théorème de Heine s'etend à une application de R^n dans R^p, continue sur un champ fermé.
les théoremes 3, 4 s'étendent, eux, à une application de R^n dans R.

<u>NB</u>: Pour 5 a et b sont deux points de la frontière.

Il suffit dans les démonstrations de remplacer les segments emboîtés par des cubes fermés emboîtés.

<u>Remarque</u>: La continuité par rapport à chaque x_i n'entraîne pas la continuité.

Dérivées

27 Rappels:

On connaît la définition de la dérivée en x_0 (à droite de x_0, à gauche de x_0). Si u et v sont dérivables dans les mêmes conditions, $u+v$, λu, uv le sont aussi:

$$\boxed{\begin{gathered}(u+v)' = u'+v' \\ (\lambda u)' = \lambda u' \\ (uv)' = uv' + vu'\end{gathered}}$$

De même $y = \prod_i^n u_i \Rightarrow y' = u_1' u_2 \ldots u_n + u_1 u_2' \ldots u_n + \ldots + u_1 u_2 \ldots u_n'$

En particuliers $n > 0 \in N$ $\boxed{(u^n)' = n u^{n-1} u'}$

En x_0 tel que $v(x_0) \neq 0$, u et v étant dérivable, $\frac{u}{v}$ est dérivable : $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$

Pour n entier positif $n = -p$ $(u^n)' = \left(\frac{1}{u^p}\right)' = n u^{n-1} u'$

28 Fonctions composées.

Soit $u(x)$ dérivable en x_0, $y(u)$ dérivable en $u_0 = u(x_0)$

On peut écrire $\frac{\Delta y}{\Delta u} = y_0' + \mathcal{E}(\Delta u)$ $\mathcal{E} \to 0$ avec Δu

Introduisons $\mathcal{E}_1(\Delta u) = \mathcal{E}$ pour $\Delta u \neq 0$ et $\mathcal{E}_1(\Delta u) = 0$ pour $\Delta u = 0$. Divisons alors par $\Delta x \neq 0$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \times y_0 + \mathcal{E}_1 \quad \text{même si } \Delta u = 0$$

Quand $\Delta x \to 0$ $\mathcal{E}_1 \to 0$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y_0' \times u_0'$

$$\boxed{y'_{(x)} = y'_{(u)} \times u'_{(x)}}$$

29 Fonction réciproque :

y étant strictement monotone au voisinage de x_0 et derivable : $\Delta y \neq 0$. $\quad \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$

quand $\Delta y \to 0 \quad \Delta x \to 0 \; : \; \frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'_0$

Par conséquent $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{y'_0}$. $\quad \boxed{x'_{0(y)} = \frac{1}{y'_{0(x)}}}$

Application :

Dans le domaine où $\sqrt[m]{x}$ est définie $\; y = \sqrt[m]{x}$ equivaut à $x = y^m$. Or $x'_y = m\,y^{m-1}$

Donc $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \boxed{\frac{1}{m y^{m-1}}} = \frac{1}{m x^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{1}{m} x^{\left(\frac{1}{m}-1\right)}$

$y = x^{\frac{p}{q}} \quad y = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p \Rightarrow y' = p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}$

$\Rightarrow y' = \frac{p}{q} x^{\frac{p-1}{q}+\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$

D'où $(x^m)' = m x^{m-1}$ et $(u^m)' = m\,u^{m-1}u'$

30 Fonction circulaire directe et reciproque :

$y = \sin x \; : \quad \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$

$= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right) \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

quand $x \to 0 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \to \cos x$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

$y = \cos x : \quad (\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

$y = \operatorname{tg} x \quad (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$y = \cotg x \qquad (\cotg x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$$\boxed{(\cotg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Conséquences:

$y = \operatorname{Arc\,sin} x \quad \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ x = \sin y \end{cases} \qquad y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\cos y}$

avec $|\cos y| = \sqrt{1-x^2}$

$$\boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$y = \operatorname{Arc\,cos} x : \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \qquad y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = -\dfrac{1}{\sin y}$

avec $|\sin y| = \sqrt{1-x^2}$

$$\boxed{y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Theoreme: $(\operatorname{Arc\,cos} x + \operatorname{Arc\,sin} x)' = 0$

d'où $\operatorname{Arc\,cos} x + \operatorname{Arc\,sin} x = k$

$x = 0 \Rightarrow k = \frac{\pi}{2} \qquad \boxed{\operatorname{Arc\,cos} x + \operatorname{Arc\,sin} x = \frac{\pi}{2}}$

$y = \operatorname{Arc\,tg} x \quad \begin{cases} x = \operatorname{tg} y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\boxed{y' = \frac{1}{1+x^2}}$$

$y = \operatorname{Arc\,cotg} x \Rightarrow \boxed{y' = -\frac{1}{1+x^2}}$

31 Dérivée successive de y:

$y^n = \left[y^{(n-1)}\right]'$ par définition.

Si $y = uv$ on a $y' = u'v + uv'$

$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$

En raisonnant par récurrence:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + n\,u^{(n-1)} + \dots + C_n^p\, u^{(n-p)} v^p + \dots + uv^{(n-p)}$$

$$= \boxed{\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, u^{(n-p)} v^{(p)}}$$

on la suppose vrai pour $n-1$: $(uv)^{(n)} = \left[uv^{(n-1)} \right]'$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n-1} \left(C_{n-1}^p\, u^{(n-p)} v^{(p)} + C_{n-1}^p\, u^{(n-p-1)} v^{(p+1)} \right)$$

Les termes en $u^{(n-p)}\, v^{(p)}$ proviennent des termes $C_{n-1}^p\, u^{(n-p-1)} v^{(p)}$ et $C_{n-1}^{p-1}\, u^{(n-p)} v^{(p-1)}$.

Le coefficient de $u^{(n-p)}\, v^p$ est $C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = C_n^p$

32 Theoreme de Rolles:

Si f est definie et continue sur le segment $[a,b]$, derivable sur $]a,b[$ et si $f(a) = f(b)$: $\exists c \in]a\, b[\ f'(c) = 0$

- C'est evident si f est constante sur le segment $[a\, b]$
- Sinon l'une des bornes est differentes de $f(a)$. Supposons que ce soit m. D'après le théorème 4 du § 22 :

$\exists c \in [a.b]\ \ f(c) = m$. Or ici c est different de a et b puisque $m \neq f(a)$ ou $f(b)$. Soit $\exists c \in]ab[\ f(c) = m$

D'apres les hypothèses $f'(c)$ existe : $f'(c)$ est donc à la fois derivee à droite et à gauche. Comme derivee à droite elle est la limite quand $h \to 0$ de :

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \quad \text{pour } h > 0$$

sa limite $f'(c)$ est positive ou nulle $(h \to +0)$

Considerant maintenant $f'(c)$ comme derivee à gauche on remarque que $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$ pour $h < 0$

Sa limite $f'(c)$ est negative ou nulle $(h \to -0)$

Donc $f'(c) = 0$

34 **Formule de Taylor:**

Si $f\ f' \dots f^{(n)}$ sont definies sur $[a,b]$, et $f^{(n+1)}$ sur $]a,b[$. On definit K de la facon suivante.

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + K\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cette equation du premier degre en K admet effectivement une solution unique. Introduisons la fonction:

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'x - \dots - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}x - K\frac{(b-x)^{n+1}}{n+1\,!}$$

Cette fonction est definie sur $[a,b]$, continue sur $[a,b]$. La valeur aux bornes est $\varphi(b)=0$ et $\varphi(a)=0$. De plus elle est derivable sur $]a.b[$. On applique alors le theoreme de Rolles:

$$\exists c \in\ ]a.b[\quad \varphi'(c)=0$$

$$\varphi'(x) = -\cancel{f'(x)} + \cancel{f'(x)} - (b-x)\cancel{f''(x)} + (b-x)\cancel{f''(x)} - \frac{(b-x)^2}{2} f'''(x) \dots$$

Terme general:

$$\left[-\frac{(b-x)^p}{p\,!} f^{(p)}x\right]' = \frac{(b-x)^{p-1}}{p-1\,!} f^{(p)}(x) - \cancel{\frac{(b-x)^p}{p!} f^{(p+1)}}(x)$$

$$\left[-\frac{(b-x)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x)\right]' = \cancel{\frac{(b-x)^p}{p!} f^{(p+1)}}(x) - \frac{(b-x)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+2)}x$$

Nous avons finalement les seuls termes restants:

$$\frac{K\,(b-c)^n}{n!} = \frac{(b-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c)$$

$$\text{d'où}\quad K = f^{(n+1)}(c).$$

D'ou la formule:

$$\boxed{f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1\,!} f^{(n+1)}(c)}$$

Applications:

① Si $f, f', \dots f^{(n)}, f^{(n+1)}$ existent au voisinage de 0 ($f^{(n+1)}$ pouvant ne pas exister pour 0) et si $f \cdots f^{(n)}$ sont continues en 0 on obtient la formule de Mac-Laurin.

$$\boxed{f(x) = f(0) + x f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)}$$

$$(0 < \theta < 1)$$

③ Calcul d'erreurs:

L'erreur commise en remplacant $f(a)$ par, $f(\bar{a}) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\bar{a})$ ou $h = a - \bar{a}$ est en valeur absolue majoree par $\Delta = \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} k$ ou k est un majorant de $|f^{(n+1)}(x)|$

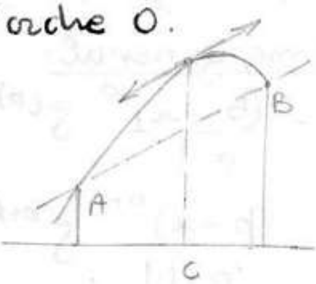
34 Formules d'accroissement finis:

Si f est définie et continue sur $[a, b]$ (ou $[b.a]$) derivable sur $]a,b[$ (ou $]b\,a[$):

$\exists c \in]a,b[$ (ou $]b.a[$) tel que $\boxed{f(b) - f(a) = b - a\ f'(c)}$

C'est la formule de Taylor à l'ordre 0.

Interpretation géometrique:



généralisation:

Si $f(t)$ et $g(t)$ satisfaisent sur $[a,b]$ (ou $[b.a]$) aux conditions precedentes et si $g(a) \neq g(b)$

$\exists c \in]ab[$ ou ($]b\,a[$) tel que $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Il suffit d'appliquer le théorème de Rolles à la fonction $\varphi(t) = f(b) - f(t) - A[g(b) - g(t)]$

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Si $g'(c) = 0$ on fait la convention $f'(c) = 0$

35 Variations de fonctions:

(i) Si f est definie sur I, et admet en tout point de I une derivee nulle, f est constante sur I, car x_0 étant un point de I:

$$\forall x \in I \quad f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\, f'(\xi)$$

ξ étant compris entre x et x_0: Comme $f'(\xi) = 0$
$f(x) = f(x_0)$

(ii) Si $f'(x) > 0$ en tout point de I, f est strictement croissante sur I, car $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\, f'(\xi)$ montre que $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

(iii) Si $f'(x) < 0$ en tout point de I, f est strictement décroissante sur I (Demonstration analogue)

36 Differentielles:

Etant donné une fonction derivable f, par definition $df = f'(x)\, h$ ou h est arbitraire. df est donc une fonction de deux variables independantes. Si f se reduit à la fonction x : $dx = h$

D'où la notation définitive

$$\boxed{\begin{array}{c} df = f'(x)\, dx \\ f'(x) = \dfrac{df}{dx} \end{array}}$$

<u>Extension</u>: On note de façon symbolique $\dfrac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x)$

<u>Invariance d'ecriture de la differentielle lorsqu'on change de variable independante.</u>

Si $y = f(x)$ f derivable
$x = \varphi(t)$ φ derivable

$$dy = y'_t \, dt \qquad \text{et } y'_t = y'_x \, x'_t$$

$$dy = (y'_x \, x'_t)\, dt = y'_x \,(x'_t \, dt) = y'_x \, dx$$

où dx est maintenant la différentielle de la fonction $x(t)$

on a de façon évidente :

$$\boxed{\begin{aligned} d(u+v) &= du + dv \\ d(uv) &= u\,dv + v\,du \\ d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \end{aligned}}$$

Infinitudes

37 Equivalence au voisinage de $a \in \bar{R}$

Deux fonctions y et z de x définies au voisinage de $a \in R^*$ sont dites équivallentes au voisinage de a si $\frac{y}{z} \to 1$ quand $x \to a$. Il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

Conséquences: * $y \to \ell \Rightarrow z \to \ell \quad \ell \in \bar{R}$

* Si $y \sim y_1$ et $z \sim z_1$ | $yz \sim y_1 z_1$

$\frac{y}{z} \sim \frac{y_1}{z_1}$

(Par contre on ne peut rien dire pour $y+z$ et x_1+z_1

38 Infiniments petits:

y est dit infiniment petit quand $x \to a$, si $y \to 0$

y et z étant des infiniments petits simultanés, on dit que y est d'ordre supérieur à z si $\frac{y}{z} \to 0$.

(Ce n'est pas une relation d'ordre)

Si $\frac{y}{z} \to \ell$ $(\ell \neq 0, \neq \infty)$ y et z sont de même ordre

C'est une relation d'équivalence.

Deux infiniments petits equivalents sont de même ordre.

39 Ordre et partie principale:

S'il existe $p \in \mathbb{Q}^+$ et $A \in \mathbb{R}^+$ tel que $\frac{y}{z^p} \to A$ quand $x \to a$, y et z étant des infiniments petits on dit que y est d'ordre p par rapport à z et que sa partie principale en z est $A z^p$.
Les notions sont stables vis à vis de l'equivalence définie au § 37.

Le produit de deux infiniments petits simultanés admettant des parties principales par rapport à un infiniment petit donné, a pour partie principale le produit des parties principales.

Si dans une somme d'infiniments petits simultanés en nombre fini, l'un deux est d'ordre inferieur aux autres, il est equivalent à la somme.

En effet : si $S = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ avec $\lim \frac{y_2}{y_1} = \dots = \lim \frac{y_n}{y_1} = 0$, $\frac{S}{y_1} = 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{y_i}{y_1} \to 1$ quand $x \to a$.

- Si dans cette somme tous les termes sont de même ordre p en x, et si la somme σ de leurs parties principales est différente de 0, alors S est d'ordre p en x et sa partie principale est σ.
  En effet puisque $\frac{y_i}{x^p} \to A_i$, $\frac{S}{x^p} \to \sum_1^n A_i$
- Si dans cette somme tous les termes sont de même ordre p en x et si $\sigma(a) = 0$, S est d'ordre supérieur à p car $\frac{S}{x^p} \to 0$.

40 Infiniments grands :

y est dit infiniment grand quand $x \to a \in \overline{\mathbb{R}}$ si $y \to \infty$, c'est à dire si $|y| \to +\infty$

(y de signe constant ou non)

y et z étant des infiniments grands simultanés, y est dit d'ordre supérieur à z si $\frac{y}{z} \to \infty$ c'est à dire si $\left|\frac{y}{z}\right| \to +\infty$.

y et z sont de même ordre si $\frac{y}{z} \to \ell$ $(\ell \neq 0, \neq \infty)$

Les notions d'ordre, de partie principale, les resultats sur les produits et somme s'étendent au infiniments grands. avec cette reserve que pour ce dernier S peut rester fini.

41 Developpements limitès:

$f(x)$ admet un DL d'ordre $n \in N^*$ au voisinage de 0 s'il existe un polynôme F de degre superieur ou egal à n tel que $f(x) - F(x)$ soit infiniment petit d'ordre superieur à n en x

$F(x)$ est la partie regulière du developpement.

Unicité: Supposons qu'on connaisse deux DL d'ordre n au voisinage de 0:

$$f(x) = F_1(x) + \varepsilon_1(x^n) \qquad \varepsilon_1 \to 0 \text{ quand } x \to 0$$

$$f(x) = F_2(x) + \varepsilon_2(x^n) \qquad \varepsilon_2 \to 0 \quad \text{"} \quad x \to 0$$

D'où $F_1(x) - F_2(x) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\, x^n$

D'où $F_1(0) = F_2(0)$ sinon les deux membres aurait des limites differentes quand $x \to 0$. Ceci posé si $F_1 \neq F_2$ $F_1(x) - F_2(x)$ serait une fonction polynome de la forme: $a_p x^p + \dots + a_m x^m$ avec $m \leq$ ce serait un infiniment petit d'ordre $p \leq m$, ce qui est contradictoire puisque le second membre est d'ordre superieur a m. Donc $F_1 = F_2$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

42 Opérations

(I) Si $f_1(x) = F_1(x) + \varepsilon_1 x^n$

$$f_2(x) = F_2(x) + \varepsilon_2 x^n$$

$$f_1(x) + f_2(x) = \underbrace{F_1(x) + F_2(x)}_{d^o < n} + \underbrace{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}_{\to 0} x^n$$

D'après l'unicité le second membre représente le DL d'ordre n de $f_1(x) + f_2(x)$.

(II) De même $f_1(x) f_2(x) = F_1(x) F_2(x) + x^n [\varepsilon_2 F_1(x) + \varepsilon_1 F_2(x) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 x^n]$

Soit $\mathcal{C}(x)$ la fonction polynome obtenu en ne conservant que les monômes de $d^o \leq n$ de $F_1 F_2$. On peut écrire $F_1(x) F_2(x) = \mathcal{C}(x) + \varepsilon x^n \quad (\varepsilon \to 0)$

D'où $f_1(x) f_2(x) = \mathcal{C}(x) + \varepsilon' x^n \quad (\varepsilon' \to 0)$

(III) Si $F_2(x) \neq 0$. Divisons F_1 par F_2 à l'ordre n suivant les puissances croissantes. On peut écrire $F_1 = F_2 Q + x^{n+1} \rho$

D'où $F_1(x) = F_2(x) Q(x) + x^n [\underbrace{x \rho(x)}_{\varepsilon}]$

et $f_1(x) = [f_2(x) - \varepsilon_2 x^n] Q(x) + \varepsilon x^n + \varepsilon_1 x^n$

$$f_1(x) = f_2(x) Q(x) + \varepsilon' x^n$$

et enfin : $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = Q(x) + \dfrac{\varepsilon'}{f_2(x)} x^n$

Quand $x \to 0$ $\varepsilon' \to 0$ $f_2(x) \to F_2(0) \neq 0$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = Q(x) + \varepsilon'' x^n$$

43 Fonctions composées :

$u(x) = a_1 x + \ldots\ldots + a_n x^n + \varepsilon x^n$ est un DL d'ordre n au voisinage de 0, donc $u_0 = 0$

$g(u) = b_0 + b_1 u + \dots + b_n u^n + \varepsilon_1 u^n$.

Les fonctions $u\ u^2 \dots u^n$ admettent des DL d'ordre n comme produit : $u^p = F_p(x) + \alpha_p x^n$

La fonction composée s'écrit alors

$$g[u(x)] = \underbrace{b_0 + \sum_{p=1}^{n} b_p F_p(x)}_{d^o \leq n} + x^n \Big[\underbrace{\sum_{p=1}^{n} \alpha_p b_p + \varepsilon_1 \left(\tfrac{u}{x}\right)^n}_{(1)} \Big]$$

Quand $x \to 0$ $\quad \frac{u}{x} \to a_1 \quad \left(\frac{u}{x}\right)^n \to a_1{}^n$

Donc (1) $\to 0$ avec x. La formule est donc bien le DL d'ordre n de la fonction.

Remarque : Pour simplification d'écriture on écrit, comme Landau, $o(x^n)$ au lieu de εx^n

44 Intégration d'un développement limité :

Si f est dérivable au voisinage de 0, sauf peut être en 0, si f' admet un DL d'ordre n de partie régulière $P(x)$, f admet un DL d'ordre $n+1$. Sa partie régulière étant $F(x)$, la primitive de $P(x)$ qui au point 0 prend pour valeur la limite ℓ de $f(x)$ quand $x \to 0$.
(Si f est définie et continue en 0 $\quad \ell = f(0)$).

Par hypothèse en effet : $f'(x) = P(x) + \varepsilon x^n$
Posons $\varepsilon x^n = \varphi(x)$. f' est intégrable (f étant précisément une de ses primitives) : $P(x)$ l'est également comme polynôme. $\varphi(x) = f'(x) - P(x)$ l'est aussi comme différence de fonctions intégrables au voisinage de 0. Soit $\Phi(x)$ la primitive de $\varphi(x)$ qui tend vers 0 quand $x \to 0$.

Elle existe : c'est $f(x) - F(x)$

Φ étant dérivable sur $]0\,x[$ ou $]x.0[$ (suivant que x est positif ou négatif) on pourra lui appliquer la formule des accroissements finis directement si $f(x)$ est continue et définie en 0. Sinon on considèrera la fonction $f_1(x)$ $\left|\begin{array}{ll} f_1(x) = f(x) & x \neq 0 \\ f_1(0) = \ell & \end{array}\right.$

(prolongement par continuité de $f(x)$)

On posera $\Phi_1(x) = f_1(x) - F(x)$.

on écrira donc en toute généralité :

$$\Phi_1(x) - \Phi_1(0) = \Phi(x) = x\,\Phi'(\xi) = x\,\varphi(\xi)$$

or $\varphi(\xi) = \xi^n \cdot \varepsilon(\xi) = \theta^n x^n\, \varepsilon(\theta x) \qquad 0<\theta<1$

Dès lors $\Phi(x) = x^{n+1} \underbrace{\theta^n\, \varepsilon(\theta x)}_{\varepsilon_1(x)} \qquad \varepsilon_1 \to 0$

Remarque : L'existence d'un DL d'ordre n pour f n'implique pas celle d'un DL d'ordre n-1 pour f' car ε' ne tend pas nécessairement vers 0 avec x, mais on voit que si celui-ci existe sa partie régulière est la dérivée de F !

45 Formule de Taylor-Young.

Supposons l'existence de $f^n(0)$.

$$\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = f^{(n)}(0) + \varepsilon \qquad \varepsilon \to 0$$

D'après le § 44 on tire de :

$$f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(0) + x\, f^{(n)}(0) + \varepsilon x$$

$$f^{(n-2)}(x) = f^{(n-2)}(0) + x\, f^{(n-1)}(0) + \frac{x^2}{2} f^{(n)}(0) + o(x^2)$$

et ainsi de suite. Finalement :

$$\boxed{f(x) = f(0) + x\, f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n)}$$

Extension: Supposons l'existence de $f^{(n)}(a)$ et posons $x - a = X$ et $f(a+X) = \varphi(X)$

$$\varphi(X) = \varphi(0) + X\, \varphi''(0) + \frac{X^2}{2} \varphi''(0) + \dots + \frac{X^n}{n!} \varphi^{(n)}(0) + o(X^n)$$

$$\boxed{f(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o[(x-a)^n]}$$

46 Developpements usuels

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \qquad \text{(Young)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + o\left(x^{2n+1}\right) \qquad \text{(Derivation)}$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + o(x^8) \qquad \text{(Division)}$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{p!} x^p + o(x^p)$$

Applications: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ $\quad m = -\frac{1}{2} \quad X = -x^2$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{1.3\dots(2p-1)}{2.4\dots 2p} x^{2p} + o(x^{2p+1})$$

$$\operatorname{Arc\,sin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \dots + \frac{1.3\dots(2p-1)}{2.4\dots 2p} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+1})$$

$$\operatorname{Arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,sin} x$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\operatorname{Arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

Derivées Partielles

47 Définition:

Soit f une fonction de n variables x_i definies sur un certain champ Δ de R^n : la derivée partielle de f par rapport à x_i est par définition la derivee de la fonction x_i seule obtenu en considerant les autres variables comme fixe: $f'(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

L'existence des n derivées partielles en un point M de Δ implique evidemment la continuité par rapport à chaque variable mais non la continuité:

Par exemple: $\begin{cases} f(x.y) = \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pour } |x| + |y| \neq 0 \\ f(0.0) = 0 \end{cases}$

Cette fonction qui admet des derivees partielles n'est pas continue pour une variation simultanée des deux variables.

48 Théorème:

Si en M_0 et au voisinage, les n derivées partielles existent et sont continues, f est continue en M_0

Considerons par exemple une fonction de deux variables $f(x.y)$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta x) - f(x_0 y_0)$$

$$\Delta f = \underbrace{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)}_{\Delta_1} + \underbrace{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0 y_0)}_{\Delta_2}$$

Comme $\Delta_1 = \Delta x\, f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) \quad 0<\theta_1<1$

(accroissement fini)

$\Delta_2 = \Delta y\, f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y) \quad 0<\theta_2<1$

$\Delta f = \Delta x\,[f'_x(x_0,y_0)+\varepsilon_1] + \Delta y\,[f'_y(x_0,y_0)+\varepsilon_2]$

Quand $M \to M_0$ d'une façon quelconque : $\Delta x, \Delta y, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$

Donc $\Delta f \to 0$.

(Demonstration analogue pour n variables)

49 Fonction composée:

Si les x_i sont des fonctions dérivables d'un paramètre t et si les dérivées partielles $f'(x_i)$ sont continues au point M_0, correspondant à la valeur t_0 du paramètre, la fonction composée:

$F(t) = f[x_i(t), \dots, x_n(t)]$ est dérivable en t_0

car $\Delta F = \sum_{i=1}^{n} \{\Delta x_i [f'_{x_i}(M_0)+\varepsilon_i]\}$

$\frac{\Delta F}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n} \{\frac{\Delta x_i}{\Delta t}[f'_{x_i}(M_0)+\varepsilon_i]\}$

quand $\Delta t \to 0 \quad \frac{\Delta F}{\Delta t} \to \sum_{i=1}^{n}[f'_{x_i}(M_0)\, x'_i(t_0)]$

Plus generalement si les x_i admettent des derivées partielles par rapport à p nouvelles variables t_j, le raisonnement vaut pour chacune des fonctions obtenues en faisant varier un seul des t_j:

Soit $\boxed{\frac{\partial F}{\partial t_j} = \sum_1^n \frac{\partial F}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_j}}$

50 Accroissements finis:

Les derivees partielles f'_{x_i} sont continues au voi-

voisinage de $A(a_1 \dots a_n)$, soit $B(b_1 \dots b_n)$ un point du voisinage et $F(t) = f(a_1 + h_1 t, \dots, a_n + h_n t)$ avec $h_i = b_i - a_i$. Cette fonction est dérivable sur $]0,1[$ par rapport à t d'après le § 49.

$$F(1) - F(0) = f(B) - f(A) = F'(\theta) \qquad 0 < \theta < 1$$

or $F'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 \dots x_n)\, h_i$

d'où $F'(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1 + \theta h_1, \dots, a_n + \theta h_n)$

et $f(B) - f(A) = \sum_{i=1}^{n} h_i\, f'_{x_i}(P) \qquad P \in]A.B[$

Application: Si dans le champ considéré les dérivées partielles sont bornées en valeur absolue l'erreur commise en remplaçant $f(A)$ par $f(B)$ est inférieure en valeur absolue à $\sum_{i=1}^{n} k_i |h_i|$ avec $|f'_{x_i}| \leq k_i$

51 Fonctions différentiables:

f est dite différentiable en M si Δf peut se mettre sous la forme $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i + \varepsilon \delta$

Les α_i étant des constantes par rapport aux Δx_i et δ étant l'une des normes naturelles de ΔM, ε tendant vers 0 avec δ. En prenant pour métrique $\delta = \sup |\Delta x_i|$ on voit que si $\Delta x_i = 0 \quad \forall i \neq 1$

$\delta = |\Delta x_1|$ et $\frac{\Delta f}{\Delta x_1} = \alpha_1 \pm \varepsilon$

quand $\Delta x_1 \to 0 \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x_1} \to \alpha_1$

Il en résulte que f admet des dérivées partielles en M et que $f'_{x_i} = \alpha_i$

Si f admet en M des dérivées partielles continues elle est differentiable, car pour la même metrique:

$$\left|\sum_1^n \varepsilon_i \Delta x_i\right| \leq \sum_1^n |\varepsilon_i||\Delta x_i| \leq \delta \underbrace{\sum_1^n |\varepsilon_i|}_{\to 0 \text{ quand } \Delta x_i \to 0}$$

$$\Delta F = \sum_1^n f'_{x_i} \Delta x_i + \underset{\to 0}{\varepsilon} \delta$$

NB: les fonctions differentiables constituent donc une classe intermediaire entre les fonctions admettant des derivées partielles, et les fonctions à derivées partielles continues.

52 Interversion des derivations:

Par definition $f''(x_i\, x_j) = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$

Si $f''_{x_i x_j}$ et $f''_{x_j x_i}$ sont continues en M elles sont egales en ce point: (Il suffit de le montrer pour une fonction de deux variables puisque les autres restent constantes)

Soit $\Delta = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0+\Delta x) - f(x_0, y_0)$

Soit $\varphi(x) = f(x, y_0+\Delta y) - f(x, y_0)$

$$\Delta = \varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0) = \Delta x\, \varphi'(x_0+\theta_1 \Delta x) \quad 0<\theta_1<1$$

Or $\varphi'(x) = f'_x(x, y_0+\Delta y) - f'_x(x, y_0)$

$$= \Delta y\, f''_{xy}(x, y_0+\theta_2 \Delta y) \qquad 0<\theta_2<1$$

D'où $\quad \Delta = \Delta x\, \Delta y\, f''_{xy}(x_0+\theta_1 \Delta x, y_0+\theta_2 \Delta y)$

De la même façon:

$$\psi(x) = f(x_0+\Delta x, y) - f(x_0\, y)$$

d'où $\quad \Delta = \Delta x\, \Delta y\, f''_{yx}(x_0+\theta_4 \Delta x, y_0+\theta_3 \Delta y)$

et $\quad f''_{xy}(x_0+\theta_1 \Delta x, y_0+\theta_2 \Delta y) = f''_{yx}(x_0+\theta_4 \Delta x, y_0+\theta_3 \Delta y)$

quand $\Delta x \to 0$ $\Delta y \to 0$ en vertu de la continuité

$$\boxed{f''_{xy}(x_0\, y_0) = f''_{yx}(x_0\, y_0)}$$

Conséquences:

Pour une fonction admettant des dérivées partielles successives continues on peut effectuer d'abord toutes les dérivations par rapport à x_1, puis à x_2 ....

D'où la notation: $f^{(p)}_{x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}}$ avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = p$

ou $\dfrac{\partial^p f}{\partial x_1^{\lambda_1} \dots \partial x_n^{\lambda_n}}$ avec $\sum_1^n \lambda_i = p$

Notations de Monge:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2} = r \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} = f''_{yx} = s \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2} = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = f'_x = p \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = f'_y = q \end{cases}$$

§3 Fonctions implicites.

Si $f(x\,y)$ est définie et continue sur un voisinage V de $M_0(x_0\,y_0)$ et s'annule en M_0, si f'_y existe et est continue sur V avec $f'_y(x_0\,y_0) \neq 0$ il existe une fonction $\varphi(x)$ continue au voisinage de x_0 telle que:

$$\begin{cases} f[x\ \varphi(x)] = 0 \\ y_0 = \varphi(x_0) \end{cases}$$

Soient α et β tels que le rectangle lieu des points pour lesquels $x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha$, $y_0 - \beta \leq y \leq y_0 + \beta$ soit contenu dans V et tels que f'_y garde un signe constant. (C'est possible puisque $f'_y(M_0) \neq 0$ et que $f'_y(M)$ est continue au voisinage de M_0 ce qui permet de choisir V de façon que $f'_y(M)$ y ait le signe de $f'_y(M_0)$.) Nous supposerons que ce signe est +. Considérons la fonction $\varphi_0(y) = f(x_0\, y)$

$\varphi_0(y)$ est continue sur $[y_0-\beta, y_0+\beta]$, $\varphi'_0(y) = f'_y(x_0\, y)$ est positive sur ce segment. Donc $\varphi_0(y)$ est croissante. Comme elle s'annule en M_0 $\varphi_0(y_0-\beta) = f(x_0, y_0-\beta) < 0$ et $\varphi_0(y_0+\beta) = f(x_0, y_0+\beta) > 0$. La fonction de x seule $f(x, y_0-\beta)$ est continue sur $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ et negative pour $x = x_0$. Donc :

$$\exists \alpha_1 \in R^+ \text{ tel que } x \in [x_0-\alpha_1, x_0+\alpha_1] \Rightarrow f(x, x_0-\beta) < 0$$
$$\exists \alpha_2 \in R^+ \text{ tel que } x \in [x_0-\alpha_2, x_0+\alpha_2] \Rightarrow f(x, y_0+\beta) > 0$$

Soit $\alpha_3 = \inf(\alpha_1, \alpha_2)$ et $x \in [x_0-\alpha_3, x_0+\alpha_3]$.

La fonction de y seule $\varphi(y) = f(x, y)$ (x etant bloqué) est definie et continue sur $[y_0-\beta, y_0+\beta]$ et l'on a $\varphi(y_0-\beta) < 0$, $\varphi(y_0+\beta) > 0$. Enfin $\varphi'_y = f'_y(x, y) < 0$ sur ce segment.

$\varphi(y)$ s'annule une fois et une seule sur ce segment. La valeur de y pour laquelle $\varphi(y) = 0$ sera $\mathcal{C}(x)$ et l'on a bien $f[x, \mathcal{C}(x)] = 0$.

On peut écrire $|\mathcal{C}(x) - \mathcal{C}(x_0)| < \beta$ $\forall \varepsilon \in R^+$. On peut choisir $\beta < \varepsilon$ ce qui assure la continuité de $\mathcal{C}(x)$ en x_0. Les hypothèses etant les mêmes pour x, suffisament voisin de x_0, la continuité est assuré sur un voisinage de x_0.

54 Derivee d'une fonction implicite:

Ajoutons aux hypothèses l'existence sur V de f'_x et sa continuité en M_0. Supposons que $|\Delta x| < \alpha_3$

Soit $\Delta y < \varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0)$. On a :

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0 y_0) = \Delta x\, f'_x(x_0 y_0) + \Delta y\, f'_y(x_0 y_0) + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

ou encore $\quad = f[x_0+\Delta x, \varphi(x_0+\Delta x)] - f(x_0 y_0)$

Or $f(x_0 y_0) = 0$ d'où $f[(x_0+\Delta x), \varphi(x_0+\Delta x)] = 0$

Donc $\Delta x\,[f'_x(x_0 y_0) + \varepsilon_1] = -\Delta y\,[f'_y(x_0 y_0) + \varepsilon_2]$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x_0 y_0) + \varepsilon_1}{f'_y(x_0 y_0) + \varepsilon_2}$$

quand $\Delta x \to 0 \quad \varepsilon_1\ \varepsilon_2 \to 0$ soit :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \varphi'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0 y_0)} \neq 0$$

55 Différentielles totales :

Par définition la différentielle de $f(x_1 \ldots x_n)$ est $df = \sum_1^n f'_{x_i} h_i$, les h_i étant arbitraires. Pour les fonction particulières $f = x_i$, $dx_i = h_i$

D'où la notation définitive : $\boxed{df = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i}$

(NB : cette écriture est encore valable si les x_i sont fonctions dérivables d'autres variables indépendantes :
cf : théorème sur la dérivation d'une fonction composée)

Théorème : Si l'on a prouvé que df existe et s'écrit $df = \sum_1^n P_i\, dx_i$ on peut en conclure que $P_i = f'_{x_i}$ car les deux formes différentielles prennent même valeur quel que soient les x_i.

56 Application au calcul des dérivées partielles :

Problème : Résoudre $\quad qx - py = 3$

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ q = \dfrac{\partial f}{\partial y} = f'_y \\ p = \dfrac{\partial f}{\partial x} = f'_x \end{cases}$$

On pose $x = \rho\cos\theta \Rightarrow dx = -\rho\sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, d\rho$

$y = \rho\sin\theta \Rightarrow dy = \rho\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, d\rho$

comme $dz = p\,dx + q\,dy$

$$dz = p[d\rho\cos\theta - \rho\sin\theta\, d\theta] + q[d\rho\sin\theta + \rho\cos\theta\, d\theta]$$

$$dz = (p\cos\theta + q\sin\theta)\,d\rho + \rho(q\cos\theta - p\sin\theta)\,d\theta$$

d'où $\dfrac{\partial z}{\partial \rho} = p\cos\theta + q\sin\theta$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \rho(q\cos\theta - p\sin\theta)$$

On constate que $qx - py = \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = z}$

Integration

57 Somme de Darboux

On considère la fonction f definie et bornée sur $[a,b]$ et une subdivision $d = (x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b)$. Soit M_i et m_i les bornes de $f(x)$ sur $[x_{i-1}, x_i]$. On considere les deux sommes

$$\begin{cases} s(d) = \sum_1^n m_i (x_i - x_{i-1}) \\ S(d) = \sum_1^n M_i (x_i - x_{i-1}) \end{cases}$$

Pour une meme subdivision $s(d) \leq S(d)$. Ajoutons un point ξ à d. On obtient une nouvelle subdivision d'. Supposons $x_{j-1} < \xi < x_j$ et m'_j et M'_j les bornes de $f(x)$ sur $[x_j \ \xi]$ et m''_j et M''_j les bornes de $f(x)$ sur $[\xi \ x_j]$. On pose $m_j = \inf(m'_j \ m''_j)$. D'où

$$m_j (x_j - x_{j-1}) = m_j (\xi - x_{j-1}) + m_j (x_j - \xi)$$
$$m_j (x_j - x_{j-1}) \leq m'_j (\xi - x_{j-1}) + m''_j (x_j - \xi)$$

D'où $s(d) \leq s(d')$. De même $S(d) \geq S(d')$

Ceci posé, soit deux subdivisions quelconques de $[a b]$ d_1 et d_2. Considerons $d_3 = d_1 \cup d_2$.

$$s(d_1) \leq s(d_3) \leq S(d_3) \leq S(d_2)$$
$$s(d_1) \leq S(d_2)$$

Si on appelle e l'ensemble des sommes $s(d)$ relatives à toutes les divisions possible de $[a,b]$ et E l'ensemble des sommes $S(d)$, tout element de de e est majorée par un élement quelconque de E : e admet donc une borne superieure σ. De même E admet Σ pour borne inferieure. et nous avons $\sigma \leq \Sigma$.

58 <u>Integrale de Riemann</u>:

f est dite intégrable (au sens de Riemann) sur $[a,b]$ si e et E sont adjacents. C'est à dire $\sigma = \Sigma = I$ $\boxed{I = \int_a^b f(x)\,dx}$

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que:
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists d \quad S(d) - s(d) < \varepsilon$.
La condition est evidemment suffisante. Elle est necessaire car l'adjacence de e et E implique l'existence de d_1 et d_2 telles que $S(d_2) - s(d_1) < \varepsilon$
Des lors si $d = d_1 \cup d_2$ $\quad S(d) - s(d) < \varepsilon$

59 <u>Cas ou $a > b$.</u>

On introduit des subdivisions décroissantes :
$d = (x_n = b, \ldots, x_1, x_0 = a)$. Toutes les inegalités entre s et S sont renversées. La condition d'integrabilité s'ecrit $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists d \quad s(d) - S(d) < \varepsilon$, De sorte que dans tous les cas on ecrira $|S(d) - s(d)| < \varepsilon$
Enfin toujours lorsque $a > b$, introduisons la subdivision $d' = (\xi_0 \ldots \xi_n)$ avec $\xi_i = x_{n-i}$. Alors
$s(d') = -s(d)$ et $S(d') = -S(d)$. Si les ensembles e et E sont adjacents E' et e' le sont aussi. Leur borne I et I' sont opposées.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

60 <u>Classes de fonctions intégrables</u>

(I) <u>Les Fonctions monotones</u> sur $[a.b]$ sont intégrables.

En effet elle est bornée : supposons la croissante : $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

Nous avons $S(d) - s(d) = \sum_1^n [(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})]$

$= \sum_1^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] (x_i - x_{i-1})$

Si $\delta = \sup (x_i - x_{i-1})$: $S(d) - s(d) \leq \delta \sum_1^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \delta [f(b) - f(a)]$

$\forall \varepsilon \in R^+ \ \exists d \quad S(d) - s(d) < \varepsilon$ (choisir d tel que $\delta \leq \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$)

(II) <u>Les fonctions continues</u> sur $[ab]$ sont intégrables

En effet elle est bornée, donc uniformément continue :

$\forall \varepsilon' \in R^+ \ \exists \eta \in R^+ \ |x_1 - x_2| < \eta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon'$.

Considérons une subdivision d telle que $\sup |x_i - x_{i-1}| < \eta$

m_i est atteinte en $x'_i \in [x_{i-1} \ x_i]$

M_i est atteinte en $x''_i \in [x_{i-1} \ x_i]$

Comme $|x'_i - x''_i| < \eta \Rightarrow |M_i - m_i| < \varepsilon'$ et

$S(d) - s(d) < \varepsilon' \sum_1^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon' (b-a)$.

Il n'y a qu'à choisir $\varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$

(III) <u>Les fonctions en escaliers</u> sont intégrables

<u>Définition</u>: Considérons une subdivision fixe $\Delta = (a = \alpha_0 \ldots \alpha_p = b)$

A chaque intervalle ouvert $]\alpha_{k-1} \ \alpha_k[$ associons $\beta_k \in R$, à chaque point α_k associons $\gamma_k \in R$. La fonction φ définie par
$$\begin{cases} \varphi(\alpha_k) = \gamma_k \\ \varphi(x) = \beta_k \text{ pour } x \in]\alpha_{k-1} \ \alpha_k[\end{cases}$$
est par définition une fonction en escalier.

Elles constituent un espace vectoriel sur R (Δ correspondant à $\varphi_1 + \varphi_2$ étant $\Delta_1 \cup \Delta_2$)

Elles sont intégrables. En effet pour une subdivision quelconque de $[ab]$, $M_i - m_i$ n'est différent de 0 que pour $p+1$ segments $[x_{i-1}\, x_i]$, ceux qui contiennent un point de α_k. Par ailleurs f est bornée $M = \sup(\beta_k\, \gamma_k)$ et $m = \inf(\beta_k\, \gamma_k)$

En choisissant $\sup(x_i - x_{i-1}) < \eta$ on aura alors:

$S(d) - s(d) < (p+1)(M-m)\,\eta$. Il suffit de choisir

$\eta \leq \dfrac{\varepsilon}{(p+1)(M-m)}$

61 Théorème de Darboux:

Si f est intégrable sur $[ab]$,

$\forall \varepsilon \in R^+\ \exists \eta \in R^+ \quad \delta = \sup(x_i - x_{i-1}) < \eta \implies |S(d) - I| < \varepsilon$

(On pourrait dire que $S(d) \to I$ quand d s'affine indéfiniment, mais cela supposerait une définition de la limite de la fonction d'ensemble)

Supposons par exemple $a<b$, I la borne inférieure de E. Il existe donc une subdivision d_0 telle que $S(d_0) - I < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit une autre subdivision d: un sous segment $[x_{j-1}\, x_j]$ de d ne fournit une contribution à $S(d)$ supérieure à la contribution à $S(d_0)$ que si un au moins des points de d_0 appartient à $]x_{j-1}\, x_j[$. En effet si le sous segment $[x_{j-1}\, x_j]$ est entièrement intérieur à un sous segment $[\xi_{k-1}\, \xi_k]$ de la subdivision d_0, la contribution de $[\xi_{k-1}\, \xi_k]$ à $S(d_0)$ est $M'_k(\xi_k - \xi_{k-1}) = M'_k(\xi_k - x_j) + M'_k(x_j - x_{j-1}) + M'_k(x_{j-1} - \xi_{k-1})$ où M'_k est le maximum de $f(x)$ sur $[\xi_{k-1}\, \xi_k]$: La contribution à $S(d_0)$ de $[x_{j-1}, x_j]$ est donc:

$M'_k(x_j - x_{j-1}) \geq M_j(x_j - x_{j-1})$

Ceci posé, supposons qu'un point au moins de d_0

appartienne à $]x_{j-1}\, x_j[$, la différence des contributions de $[x_{j-1}\, x_j]$ aux deux sommes est majorée en valeur absolue par la somme de leur valeur absolue, donc par $2\delta k$ si $\delta = \sup(x_{j-1} - x_j)$ et $k = \sup |f|$.
Ceci ne pouvant se produire que $n_0 - 1$ fois au plus si n_0 est le nombre de sous segment de d_0. On a

$$S(d) < S(d_0) + 2\delta k (n_0 - 1)$$

d'où $S(d) < I + \frac{\varepsilon}{2} + 2\delta k (n_0 - 1)$

On aura $S(d) < I + \varepsilon$ si l'on choisi $\delta < \frac{\varepsilon}{4k(n_0-1)}$.

NB : Il existe un théorème identique pour $s(d)$.

6 2 Conséquences.

Si f est intégrable sur $[a,b]$, prenons sur chaque $[x_{i-1}\, x_i]$ un point ξ_i la somme $\sum_1^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ est comprise entre $s(d)$ et $S(d)$, donc elle tend vers I lorsque la subdivision s'affine indéfiniment : Cette remarque est à l'origine de la notation de Leibnitz.

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

63 Propriétés de I :

① Si f est intégrable et bornée sur $[a,b]$ et $[b\, c]$ avec $a < b < c$, elle est intégrable sur $[a,c]$. Car :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; \exists d_1 \quad \Delta(d_1) = S(d_1) - s(d_1) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists d_2 \quad \Delta(d_2) = S(d_2) - s(d_2) < \frac{\varepsilon}{2}$

Si $d = d_1 \cup d_2 \quad \Delta(d) < \varepsilon$.

En outre si $\delta = \sup(x_i - x_{i-1})$ sur $[a,c]$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; \exists \eta_1 \in \mathbb{R}^+ \; \delta < \eta_1 \Rightarrow S(d_1) - \int_a^b f(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\exists \eta_2 \in R^+ \quad \delta < \eta_2 \Rightarrow S(d_2) - \int_b^c f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists \eta_3 \in R^+ \quad \delta < \eta_3 \Rightarrow S(d) - \int_a^c f(x)\,dx < \varepsilon$$

en posant $\eta = \inf \eta_i \quad (i = 1, 2, 3)$

$$\delta < \eta \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx < \varepsilon$$

d'où
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx}$$

<u>NB</u>: La relation vaut encore pour une disposition relative quelconque des points $a\,b\,c$ en vertu de la relation de Chasles generalisée.

(II) Les fonctions intégrables sur $[a\,b]$ constituent un espace vectoriel sur R:

Si $\lambda f + \mu g = h$, il faut prouver que $\Delta_h(d) < \varepsilon$ si f et g sont intégrables sur $[a.b]$.

$$\exists d_1 \quad \Delta_f(d_1) < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}$$

$$\exists d_2 \quad \Delta_g(d_2) < \frac{\varepsilon}{2|\mu|}$$

Considerons $d = d_1 \cup d_2$ $\quad \Delta_f(d) < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}$ et $\Delta_g(d) < \frac{\varepsilon}{2|\mu|}$

Or $\Delta_h(d) \leq |\lambda|\,\Delta_f(d) + |\mu|\,\Delta_g(d) < \varepsilon$ <u>CQFD</u>

Ceci posé, considérons alors l'application de cet espace vectoriel dans R qui à f associe $\int_a^b f(x)\,dx$ et montrons qu'elle est linéaire. On sait que:

$$\forall \varepsilon \in R^+ \; \exists \eta_1 \in R^+ \quad \sup(x_i - x_{i-1}) < \eta_1$$
$$\Rightarrow \left| \sum_1^{n_1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}$$

$$\forall \varepsilon \in R^+ \; \exists \eta_2 \in R^+ \quad \sup(x_i - x_{i-1}) < \eta_2$$
$$\Rightarrow \left| \sum_1^{n_2} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b g(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2|\mu|}$$

$$\forall \varepsilon \in R^+ \; \exists \eta_3 \in R^+ \quad \sup(x_i - x_{i-1}) < \eta_3$$
$$\Rightarrow \left| \sum_1^{n} h(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b h(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

Si $\eta = \inf(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$ on peut choisir une subdivision d vérifiant simultanément les trois inégalités, donc vérifiant :

$$\left| \int_a^b h(x)\,dx - \lambda \int_a^b f(x)\,dx - \mu \int_a^b g(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

d'où $$\boxed{\int_a^b h(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx}$$

(III) Si f et g sont intégrables sur $[ab]$, fg l'est aussi. * Supposons $f > 0$ $g > 0$:

Sur $[x_{i-1}\, x_i]$ si $m_i\, M_i$ sont les bornes de f et $m'_i\, M'_i$ celles de g on a $m_i m'_i \leq f(x)\, g(x) \leq M_i M'_i$.

Il suffit de montrer que : $\sum_1^n (M_i M'_i - m_i m'_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$ $\forall \varepsilon$ pour tout d. Or $M_i M'_i - m_i m'_i = (M_i - m_i) M'_i + m_i (M'_i - m'_i)$

D'où $M_i M'_i - m_i m'_i \leq M'(M_i - m_i) + M(M'_i - m'_i)$ où M et M' désignent les bornes supérieures de f et g sur $[ab]$.

D'où :

$$\sum_1^n (M_i M'_i - m_i m'_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M \sum_1^n (M'_i - m'_i)(x_i - x_{i-1}) + M' \sum_1^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

Il suffit de choisir d tel que :

$$\sum_1^n (M'_i - m'_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2M'} \quad \text{et} \quad \sum_1^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2M}$$

* Dans le cas général :

$fg = (f - m)(g - m') + mg + m'f - mm'$. Le second membre est une somme de fonctions intégrables donc intégrable. Comme on a $\lambda(fg) = (\lambda f) g$ les fonctions intégrables sur $[ab]$ constituent une algèbre associative.

(IV) Si f est borné et intégrable sur $[a.b]$ $|f|$ l'est aussi, car si m'_i et M'_i sont les bornes de $|f|$ sur $[a.b]$ $M'_i - m'_i \leq M_i - m_i$ et ceci quel que soit les signes de M_i et m_i.

⑤ Si f est borné et intégrable sur $[ab]$ avec $a<b$ et si $f(x) \geqslant 0$ sur $[ab]$, $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ car les sommes $S(\alpha)$ et $s(\alpha)$ sont positives ou nulles, leur borne I est donc positive ou nulle.

Plus précisement si $f(x) \geqslant 0$ sur $[ab]$, $f(x)$ étant strictement positive sur un sous segment de $[ab]$ on peut écrire : $\int_a^b f(x)\,dx > 0$

Conséquences :

Si f et g bornées et intégrables vérifient $f(x) \geqslant g(x)$,
$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$

(Avec comme précédemment inégalité stricte si $f(x) > g(x)$ sur un sous segment de $[a.b]$)

64 <u>Théorème de la moyenne :</u>

Soit f bornée et intégrable sur $[a.b]$.

Si $a<b$: $\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$

et $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leqslant M$$

Si $a>b$: $\int_a^b m\,dx \geqslant \int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b M\,dx$

$$m(b-a) \geqslant \int_a^b f(x)\,dx \geqslant M(b-a)$$

D'où en divisant par $b-a$ négatif, la même conclusion. Finalement $\forall a b$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a) \qquad m \leqslant \mu \leqslant M}$$

μ est la <u>valeur moyenne</u> de f sur $[ab]$

Cas particulier important:

Si f est continue sur $[a\,b]$, $\exists\ \xi \in [a\,b]$ $u = f(\xi)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi)$$

65 Primitives:

Si f est continue sur $[a.b]$ et si x et $x+\Delta x$ appartiennent à $[a,b]$, posons $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

F est fonction de sa borne supérieure et l'on a:

$$\Delta F = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \Delta x\, f(\xi)$$

$$x < \xi < x + \Delta x$$

D'où $\dfrac{\Delta F}{\Delta x} = f(\xi)$. quand $\Delta x \to 0$ $f(\xi) \to f(x)$

donc: $\boxed{\dfrac{dF}{dx} = f(x)}$

$\int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de $f(x)$. c'est celle qui s'annule pour $x = a$. Les autres seront de la forme $F(x) + C$

On a $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

Logarithmes

66 Definition:

On pose $\text{Log}\, x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ avec $x > 0$

Cette fonction existe car $\frac{1}{t}$ est continue sur $[1\ x]$ donc intégrable. En outre la continuité de $\frac{1}{t}$ implique $(\text{Log}\, x)' = \frac{1}{x}$. La fonction $\text{Log}\, x$ est définie sur $]0\ +\infty[$, continue puisque derivable et croissante puisque la derivee est positive. Elle s'annule pour $x = 1$.

Si $x < 0$ on a $(\text{Log}\,|x|)' = \frac{1}{|x|}\, x - 1 = \frac{1}{x}$. Donc quel que soit x different de 0, les primitives de $\frac{1}{x}$ sont données par $\text{Log}\,|x| + C$ que l'on notte $\int \frac{dx}{x}$

67 Propriétés:

1) Considerons la fonction $u = \text{Log}\,(ax)$ $a > 0$. En derivant $u' = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$. $\text{Log}\,(ax)$ est une primitive de $\frac{1}{x}$. Donc $\text{Log}\, ax = \text{Log}\, x + C$. Faisons $x = 1$

$\text{Log}\, a = C$. D'où $\forall\, a b \in R^+$ $\boxed{\text{Log}\, a + \text{Log}\, b = \text{Log}\, ab}$

Il en resulte que $\forall n \in N$ $\text{Log}\,(a^n) = n\,\text{Log}\, a$.

– Si $m \in Q^+$ $m = \frac{p}{q}$ $\text{Log}\,(a^m) = \text{Log}\,(a^{p/q}) = p\,\text{Log}\,(a^{1/q})$

Or $q\,\text{Log}\,(a^{1/q}) = \text{Log}\, a$ d'ou $\text{Log}\,(a^{1/q}) = \frac{1}{q}\,\text{Log}\, a$

D'ou $p\,\text{Log}\,(a^{1/q}) = \frac{p}{q}\,\text{Log}\, a = m\,\text{Log}\, a$

– Si $m \in Q^-$ $m = -m'$

$$\mathrm{Log}(a^m) = \mathrm{Log}\left(\frac{1}{a^{m'}}\right) = \mathrm{Log}\left(\frac{1}{a}\right)^{m'} = m' \,\mathrm{Log}\,\frac{1}{a}$$

Comme $\mathrm{Log}\,\frac{1}{a} + \mathrm{Log}\,a = \mathrm{Log}\,1 = 0$, $\boxed{\mathrm{Log}\,\frac{1}{a} = -\mathrm{Log}\,a}$

et $\mathrm{Log}(a^m) = -m'\,\mathrm{Log}\,a = m\,\mathrm{Log}\,a$

Finalement: $\forall m \in \mathbb{Q}$ $\boxed{\mathrm{Log}\,a^m = m\,\mathrm{Log}\,a.}$

2) $x > 1$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ $2^{n_0-1} \leq x < 2^{n_0}$

(En effet d'après la formule du binôme $2^n > 1+n$.
$\mathbb{R}$ étant archimédien on peut choisir n tel que $1+n > x$ d'où a fortiori $2^n > x$. En comparant x aux $n+1$ puissances premières de 2 on détermine n_0)

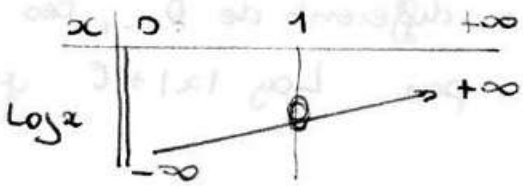
Dès lors $\mathrm{Log}\,x > (n_0-1)\,\mathrm{Log}\,2$

quand $x \to +\infty$ $2^{n_0} > x \to +\infty \Rightarrow n_0 \to +\infty$

et $n_0 - 1 \to \infty$. D'où $(n_0-1)\,\mathrm{Log}\,2 \to +\infty$ et $\mathrm{Log}\,x \to +\infty$

(De même $\mathrm{Log}\,x \to -\infty$ quand $x \to 0$)

Nous pouvons ainsi construire le tableau de variation:



3) Pour $t > 1$ $t > \sqrt{t}$ et $\frac{1}{t} < \frac{1}{\sqrt{t}}$

$$\int_1^x \frac{dt}{t} < \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_1^x = 2(\sqrt{x}-1)$$

Donc $\frac{\mathrm{Log}\,x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$

Quand $x \to +\infty$ $\frac{2}{\sqrt{x}} \to 0$ $\frac{\mathrm{Log}\,x}{x} \to 0$

La courbe admet l'axe des x comme direction asymptotique mais il n'y a pas d'asymptote. Plus généralement si m et $p \in \mathbb{Q}^+$:

$$\frac{(\mathrm{Log}\,x)^p}{x^m} = \left(\frac{\mathrm{Log}\,x}{x^{m/p}}\right)^p$$

En posant $y = x^{m/p}$ $\frac{(\mathrm{Log}\,x)^p}{x^m} = \left(\frac{p}{m}\right)^p \left(\frac{\mathrm{Log}\,y}{y}\right)^p$

quand $x \to \infty$, $y \to \infty$ $\frac{\text{Log } y}{y} \to 0$

et $\boxed{\frac{(\text{Log } x)^p}{x^m} \to 0}$ quand $x \to \infty$

quand $x \to +0$, posons $x^m |\text{Log } x|^p = \frac{|\text{Log } X|^p}{X^m}$ avec $X = \frac{1}{x}$

$X \to +\infty$ et $\frac{(\text{Log } X)^p}{X^m} \to 0$

d'où $\boxed{x^m |\text{Log } x|^p \to 0}$ quand $x \to +0$

4) Quand $x \to 0$, $\text{Log } (1+x) \to 0$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + o\, x^{(n-1)}$$

D'où en intégrant ce DL

$$\text{Log } (1+x) = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Quand $x \to 0$ $\text{Log } (1+x) \to 0$ donc $C = 0$

$$\boxed{\text{Log } (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$

68 <u>Fonction Logarithme à base a de x:</u>

La fonction $k \text{ Log } x$ $k \in \mathbb{R}^*$ vérifie la même relation fonctionnelle que $\text{Log } x$. Cette fonction prend la valeur a de x tel que $\text{Log } a = \frac{1}{k}$ (La fonction étant continue et monotone) y peut donc s'écrire:

$\frac{\text{Log } x}{\text{Log } a} = \log_a x$. Le nombre a ainsi introduit est la base de la fonction.

– Si $a > 1$ $\text{Log } a > 0$ y est croissante

– Si $0 < a < 1$ $\text{Log } a < 0$ y est décroissante

En outre si $a = \frac{1}{a'}$ $\log_a x = -\log_{a'} x$

On remarque que $\log_b x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } b} = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } a} \times \frac{\text{Log } a}{\text{Log } b}$

$$\boxed{\log_b x = \log_b a \times \log_a x}$$

<u>Cas particulier:</u> On appelle e la base de la fonction $y = \mathrm{Log}\, x = \log_e x$. C'est le nombre défini par $\mathrm{Log}\, e = 1$

69 <u>Exponentielle de base e:</u>

La fonction $\mathrm{Log}\, x$ étant continu et strictement monotone sur $]0\ +\infty[$ est inversible.

$$y = \mathcal{E}(x) \iff x = \mathrm{Log}\, y$$

La fonction $\mathcal{E}(x)$ est définie sur $]-\infty\ +\infty[$. Elle est continue et strictement croissante de 0 à $+\infty$. Sa dérivée est $\mathcal{E}'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \mathcal{E}(x)$

<u>Propriétés:</u> ① Si $\alpha = \mathcal{E}(a)$ $\beta = \mathcal{E}(b)$, $a = \mathrm{Log}\,\alpha$ et $b = \mathrm{Log}\,\beta$

D'où $a+b = \mathrm{Log}(\alpha\beta)$ et $\alpha\beta = \mathcal{E}(a+b)$

$$\mathcal{E}(a)\,\mathcal{E}(b) = \mathcal{E}(a+b).$$

② Comme $\mathcal{E}(1) = e$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{E}(n) = e^n$

Plus généralement: $m \in \mathbb{Q}$ $\mathrm{Log}(e^m) = m\,\mathrm{Log}\, e = m$

Des lors: $e^m = \mathcal{E}(m)$

Ainsi chaque fois que le symbole e^x a un sens il s'identifie à $\mathcal{E}(x)$, or $\mathcal{E}(x)$ continue à être définie pour x irrationnelle. Il y a donc lieu de convenir de noter $\forall x \in \mathbb{R}$ $\mathcal{E}(x) = e^x$. Dans ces conditions la relation fonctionnelle devient:

$$\boxed{e^{a+b} = e^a e^b}$$

③ Quand $x \to +\infty$ $\dfrac{e^x}{x^m}$ où $m \in \mathbb{Q}^+$ peut s'écrire en posant $e^x = y$, $\dfrac{y}{(\mathrm{Log}\, y)^m}$. Comme $y \to +\infty$ $\dfrac{y}{(\mathrm{Log}\, y)^m} \to +\infty$. Finalement $\forall m \in \mathbb{Q}^+$ $\boxed{\dfrac{e^x}{x^m} \to +\infty}$ <u>avec x</u>

quand $x \to -\infty$ le même artifice montre que

$$\boxed{|x|^m e^x \to 0} \quad \text{quand } x \to -\infty$$

⑩ A partir de la formule de taylor, il vient :

$$\boxed{e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^n)}$$

10 Exponentielles de base a :

La fonction φ_1 réciproque de $\log_a$ satisfait à la relation fonctionnelle $\varphi_1(u+v) = \varphi_1(u)\,\varphi_1(v)$ $\forall u v \in R$

Comme $\varphi_1(1) = a$ il en résulte $\forall n \in N$ $\varphi_1(n) = a^n$

Plus généralement $\forall m \in Q$ $\log_a(a^m) = m$. et $\varphi_1(m) = a^m$. On est conduit à la notation $\forall x \in R$ $\varphi_1(x) = a^x$

Dès lors $a^x = y \iff x = \log_a y = \dfrac{\operatorname{Log} y}{\operatorname{Log} a}$

$$\iff \operatorname{Log} y = x \operatorname{Log} a$$

$$\iff y = e^{x \operatorname{Log} a}$$

Soit $\boxed{a^x = e^{x \operatorname{Log} a}}$

Plus généralement, puisque $\operatorname{Log}(a^x) = x \operatorname{Log} a$

$$\operatorname{Log}(a^x)^y = y \operatorname{Log}(a^x) = yx \operatorname{Log} a = \operatorname{Log}(a^{xy})$$

D'où $\boxed{(a^x)^y = a^{xy}}$

La fonction a^x est définie pour $a > 0$ quel que soit $x \in R$, continue et dérivable : $(a^x)' = e^{x \operatorname{Log} a} \operatorname{Log} a = a^x \operatorname{Log} a$.

Elle est croissante si $a > 1$, décroissante si $0 < a < 1$.

En repère orthogonal les courbes d'équation $y = a^x$ et $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ sont symétriques par rapport à Oy.

11 Fonction puissance :

Puisque $x^a = e^{a \operatorname{Log} x}$, cette fonction est maintenant définie quel que soit $a \in \mathbb{R}$, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^+$, c'est à dire sur $]0, +\infty[$. On remarque que si a est une fraction irreductible à denominateur impair, la nouvelle definition est moins general que l'ancienne qui autorisait x à être negatif.
Par contre pour $x>0$, elle autorise maintenant a à être irrationnelle. Dans chaque cas on considerera x^a comme defini par celles des deux definitions qui lui assure le champ de definition le plus large.
La derivée de x^a est $e^{a \operatorname{Log} x} \times \frac{a}{x} = x^a \times \frac{a}{x} = a\,x^{(a-1)}$

Lorsque $x \to +0$, $\operatorname{Log} x \to -\infty$ $\quad e^{a \operatorname{Log} x} \to 0$ si $a>0$
Alors on peut convenir de prolonger la definition de x^a en posant $0^a = 0$.
Dans les theorémes concernant les limites de $\frac{(\operatorname{Log} x)^p}{x^m}$ ou $\frac{e^x}{x^m}$, p et m peuvent maintenant être reel positif quelconque, ainsi que dans le DL de $(1+x)^m$ ou m peut être reel quelconque.

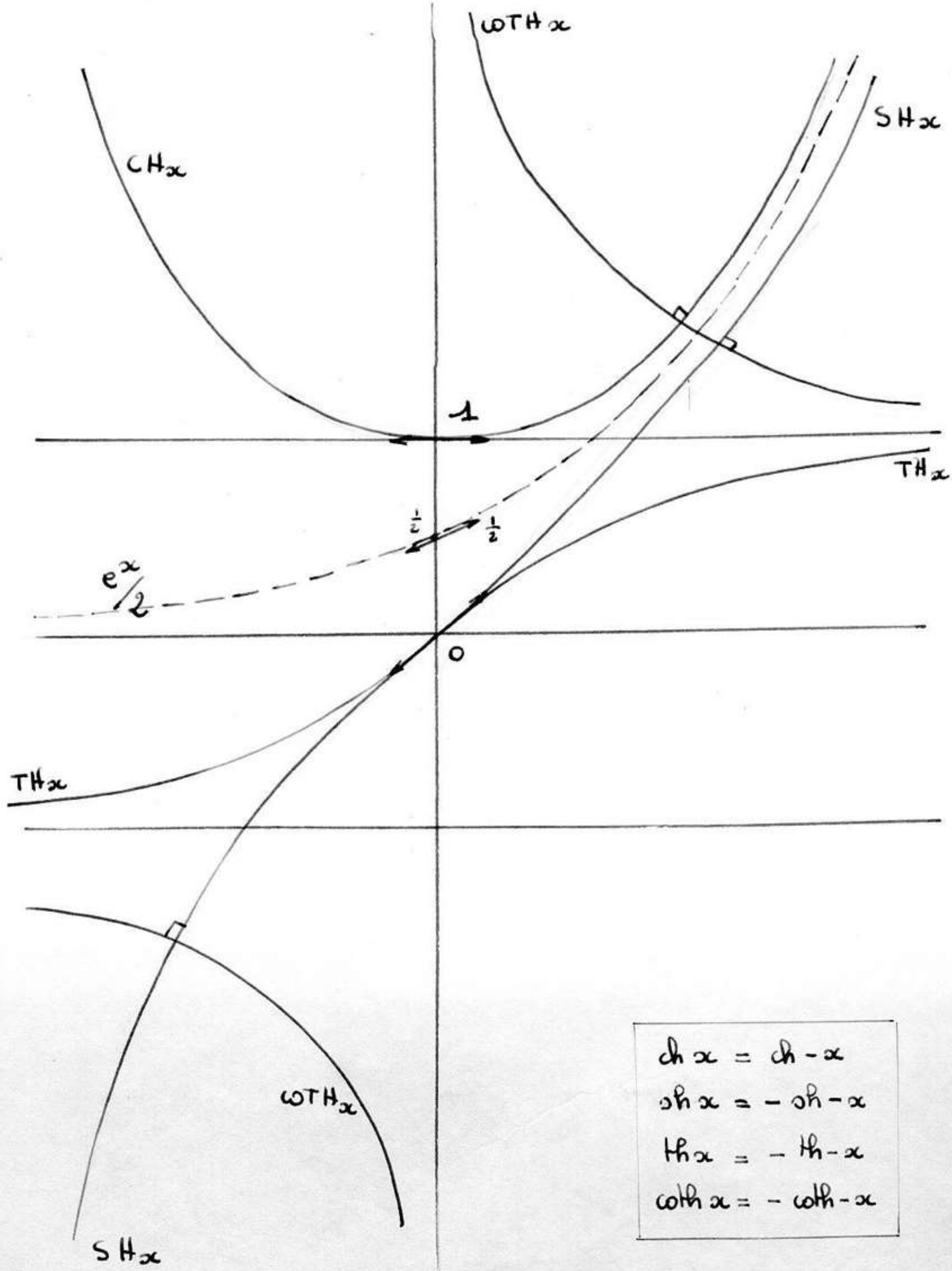
12 Fonctions hyperboliques:

$\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ sont les parties paires et impaires de e^x.

$$\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}} \qquad \boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

On definit aussi: $\boxed{\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}}$ $\quad \boxed{\operatorname{coth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}}$

Derivée: $$(\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$
$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$$



$$\mathrm{ch}\, x = \mathrm{ch}\, -x$$
$$\mathrm{sh}\, x = -\,\mathrm{sh}\, -x$$
$$\mathrm{th}\, x = -\,\mathrm{th}\, -x$$
$$\mathrm{coth}\, x = -\,\mathrm{coth}\, -x$$

$$(\text{th}\, x)' = 1 - \text{th}^2 x$$
$$(\coth x)' = 1 - \coth^2 x$$

Par ailleurs : $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} = e^x e^{-x} = 1$

$$\boxed{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1}$$

D'où $(\text{th}\, x)' = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$

$$(\coth x)' = \frac{1}{\text{sh}^2 x}$$

Propriétés : $\text{ch}\, x > 0 \quad \forall x$

$$\text{sh}\, x \begin{cases} > 0 & \forall x > 0 \\ < 0 & \forall x < 0 \end{cases}$$

Par suite sur $[0 \ +\infty[$, les deux fonctions sont croissantes ; sur $]-\infty \ 0]$ $\text{ch} x$ décroît et $\text{sh}\, x$ croît.

Pour $x = 0$ $\begin{cases} \text{sh}\, x = 0 \\ \text{ch}\, x = 1 \end{cases}$

Quand $x \to +\infty$ $\begin{cases} \text{ch} x \to +\infty \\ \text{sh} x \to +\infty \end{cases}$ et $\text{ch}(x)$ et $\text{sh}(x)$ sont des infiniments grands équivalents à $\dfrac{e^x}{2}$

De même quand $x \to 0$ $\text{sh}(x)$ est un infiniment petit équivalent à x.

La fonction $\text{th}\, x$ est impair, croissante sur $[0 \ +\infty[$

$x \longrightarrow +\infty \qquad \text{th}\, x \to 1$

$x \longrightarrow 0 \qquad \text{th}(x) \sim \text{sh}(x) \sim x$

La fonction $\coth x$ est impair, décroissante sur $[0 \ +\infty[$

$x \longrightarrow +\infty \qquad \coth x \to 1$

$x \longrightarrow +0 \qquad \coth x \to +\infty$

Les DL de $\text{ch} x$ et $\text{sh}\, x$ au voisinage de 0, s'obtiennent par la formule de Taylor-Young.

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

7.3 Trigonométrie hypabolique:

$$e^{a+b} = e^a e^b = (\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a)(\operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b)$$

d'où $e^{a+b} = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b + \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a$

$e^{-a-b} = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b - \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a$

Soit:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{ch}(a+b) &= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \\ \operatorname{sh}(a+b) &= \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \\ \operatorname{ch}(a-b) &= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \\ \operatorname{sh}(a-b) &= \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \end{aligned}}$$

Par division il vient.

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{th}(a+b) &= \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b} \\ \operatorname{th}(a-b) &= \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b} \end{aligned}}$$

On peut tirer:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{ch} 2x &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \\ &= 1 + 2\operatorname{sh}^2 x \\ &= 2\operatorname{ch}^2 x - 1 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a}$$

Conséquences: $\operatorname{sh} a \operatorname{ch} a = \dfrac{e^{2a} - e^{-2a}}{4}$

Formules de duplication: En posant $t = \operatorname{th} \frac{a}{2}$

$$\boxed{\operatorname{ch} a = \frac{1+t^2}{1-t^2}} \qquad \boxed{\operatorname{sh} a = \frac{2t}{1-t^2}} \qquad \boxed{\operatorname{th} a = \frac{2t}{1+t^2}}$$

74 Fonctions réciproques:

Les fonctions $\operatorname{th} x$, $\operatorname{sh} x$ sont inversibles sur $]-\infty\ +\infty[$, $\operatorname{ch} x$ l'est sur $[0\ +\infty[$, $\operatorname{coth} x$ l'est sur $]-\infty\ 0[$ et $]0\ +\infty[$. On écrira donc :

$$y = \operatorname{Arg} \operatorname{sh} x \iff x = \operatorname{ch} y$$

$$\begin{cases} y = \operatorname{Arg} \operatorname{ch} x \\ x \geq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \operatorname{ch} y \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \operatorname{Arg} \operatorname{th} x \\ |x| < 1 \end{cases} \iff x = \operatorname{th} y$$

$$\begin{cases} y = \operatorname{Arg} \operatorname{coth} x \\ |x| > 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \operatorname{coth} y \\ y \neq 0 \end{cases}$$

En remarquant que $\operatorname{sh} y = x \Rightarrow \operatorname{ch} y = \sqrt{1+x^2}$

d'où $e^y = x + \sqrt{1+x^2}$

et $\boxed{y = \operatorname{Arg} \operatorname{sh} x = \operatorname{Log}(x + \sqrt{1+x^2})}$

De même $\operatorname{ch} y = x \Rightarrow \operatorname{sh}^2 y = x^2 - 1$

La condition $y \geq 0$ entraîne alors $\operatorname{sh} y = \sqrt{x^2-1}$

d'où $e^y = x + \sqrt{x^2-1}$

et $\boxed{y = \operatorname{Arg} \operatorname{ch} x = \operatorname{Log}(x + \sqrt{x^2-1})}$

Enfin $\operatorname{th} y = x \Rightarrow \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x \Rightarrow \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = x$

d'où $e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$

et $\boxed{y = \operatorname{Arg} \operatorname{th} x = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x}}$

$\operatorname{coth} y = x \Rightarrow e^{2y} = \dfrac{x+1}{x-1}$

$$\boxed{y = \operatorname{Arg} \operatorname{coth} x = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{x+1}{x-1}}$$

<u>Dérivées</u> : $(\operatorname{Arg} \operatorname{sh} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch} y} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(\operatorname{Arg} \operatorname{ch} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{sh} y} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$$(\text{Arg th}x)' = \frac{1}{1-\text{th}^2 y} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(\text{Arg coth}x)' = \frac{1}{1-\text{coth}^2 y} = \frac{1}{1-x^2}$$

<u>Remarque</u>: Les deux dérivées ci dessus ont des formes identiques mais sont définies sur des intervalles différents

Au voisinage de 0:

① $\text{Arg sh}x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\, x^{(2n+2)}$

⑪ $\text{Arg th}x = x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\, x^{2n+2}$

<u>NB</u> On intègre $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pour obtenir ①.

Pour obtenir ⑪ on procède comme suit:

$\text{Arg th}\, x = \frac{1}{2}\left[\text{Log}(1+x) - \text{Log}(1-x)\right]$

$\text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\text{Log}(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^{n+1}}{n+1}$

et $\text{Arg th}x = x + \frac{x^3}{3} + \dots$

$\boxed{\text{Remarque}}$

<u>Intégration</u> de $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

$x > 1 \quad \text{Arg ch}x = \text{Log}(x + \sqrt{x^2-1})$

$x < -1 \quad -\text{Arg ch}(-x) = \text{Log}(-x - \sqrt{x^2-1})$

D'où $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \text{Log}\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|$

<u>Intégration</u> de $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$

$|x| < 1 \quad \text{Arg th}x = \frac{1}{2}\text{Log}\frac{1+x}{1-x}$

$|x| > 1 \quad \text{Arg coth}x = \frac{1}{2}\text{Log}\frac{1+x}{x-1}$

D'où $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\text{Log}\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

Quadratures

75 Changement de variable :

Si $\varphi(t)$ admet une derivee continue sur $[\alpha\ \beta]$ et si $f(x)$ est continue sur I, image de $[\alpha\ \beta]$ par φ la fonction $F(x) = \int f(x)\,dx$ devient une fonction $G(t)$ lorsqu'on y remplace x par $\varphi(t)$ et l'on a :

$G'(t) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$. Comme $\varphi'(t)$ est continue, $G'(t)$ est continue sur $[\alpha\ \beta]$ et l'on a $G(t) = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$

En outre si $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$ on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

Remarque : $\varphi(t)$ n'est pas necessairement strictement monotone sur $[\alpha\ \beta]$, il y a donc lieu de suivre par continuité sur $[\alpha\ \beta]$ la façon dont se substituent l'une à l'autre les différentes déterminations de la fonction reciproque.

76 Intégration par parties :

Si u et v ont des derivées continues sur $[a\ b]$ alors $(uv)' = u'v + uv'$. Les fonctions uv' et vu' sont continues donc intégrables : donc :

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$$

Cette methode est utilisée en particulier lorsque u est une fonction transcendante a derivée algébrique.

77 Fractions rationnelles

La decomposition en element simple sur $\mathbb{R}$ ramène l'intégration d'une fraction rationnelle au calcul de $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ et $\displaystyle\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+px+q)^n}\,dx$
$p^2-4q<0$

① Pour $n \neq 1$:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int (x-a)^{-n}\, d(x-a) = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C \qquad (x \neq a)$$

Pour $n = 1$:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \operatorname{Log}|x-a| + C \qquad (x \neq a)$$

⑪ On remarque que $(x^2+px+q)' = 2x+p$

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+px+q)^n} = \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x+p-p+\frac{2\beta}{\alpha}}{(x^2+px+q)^n}\,dx$$

$$= \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx + \left(\beta - \frac{p\alpha}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

La premiere integrale se calcule par le changement de variable $u = x^2+px+q \Rightarrow du = (2x+p)\,dx$

D'où $\displaystyle\frac{\alpha}{2}\int \frac{du}{u^n}$ que l'on sait calculer.

Pour la seconde on ecrit : $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$

et on pose $\displaystyle x + \frac{p}{2} = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\operatorname{tg}\varphi$

D'où $\displaystyle\varphi = \operatorname{Arc\,tg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$.

On est ramené au calcul de $\displaystyle\int (\cos^{2n-2}\varphi)\,d\varphi$ qui peut s'effectuer en fonction lineaire de $\cos 2\varphi$.

On peut aussi operer par recurrence en remarquant que:

$$\int \cos^{2n-2}\varphi\, d\varphi = \int \cos^{2n-3}\varphi \cos\varphi\, d\varphi = \int \cos^{2n-3}\varphi\, d(\sin\varphi)$$

$$= \cos^{2n-3}\varphi \sin\varphi - \int \sin\varphi\, d\cos^{2n-3}\varphi$$

$$= \cos^{2n-3}\varphi \sin\varphi + (2n-3)\int \sin^2\varphi \cos^{2n-4}\varphi\, d\varphi$$

$$= \cos^{2n-3}\varphi \sin\varphi + (2n-3)\int \cos^{2n-4}\varphi\, d\varphi - (2n-3)\int \cos^{2n-2}\varphi\, d\varphi$$

Si on pose: $I_{2n-2} = \int \cos^{2n-2}\varphi\, d\varphi$, la relation de recurrence s'ecrit:

$$\boxed{(2n-2)\, I_{2n-2} = \cos^{2n-3}\varphi \sin\varphi + (2n-3)\, I_{2n-4}}$$

78 Polynômes en $\cos x$ et $\sin x$

On doit calculer les integrales:

$$\int \cos^p x \cdot \sin^q x\, dx \qquad p\, q \in \mathbb{N}$$

* Si p est impair: $p = 2k+1$

$$I = \int \cos^{2k+1} x \sin^q x\, dx = \int \cos^{2k} x \sin^q x\, d(\sin x)$$

En posant $u = \sin x$: $I = \int (1-u^2)^k u^q\, du$.

On est ramené à l'integration d'un polynôme.

* Si q est impair; on pose $u = \cos x$
* Si p et q sont pairs, on peut transformer $\cos^p x$ et $\sin^q x$ en somme, ou l'exprimer uniquement en fonction de $\cos x$, ce qui ramène au calcul du § 77

79 Fractions rationnelles en $\cos x$ et $\sin x$:

Une methode generale consiste en le changement de variable $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ d'où $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ et on est ramené à une fraction rationnelle.

— Si $f(\sin x, \cos x)\,dx$ ne change pas lorsqu'on remplace x par $\pi - x$, on pose $\sin x = t$. Car f peut s'écrire, les P_i désignant des polynomes en $\sin x$.

$$f = \frac{P_1 + \cos x\, P_2}{P_3 + \cos x\, P_4}$$ En changeant x en $\pi - x$.

$$\frac{P_1 + \cos x\, P_2}{P_3 + \cos x\, P_4}\,dx = -\frac{P_1 - \cos x\, P_2}{P_3 - \cos x\, P_4}\,dx = \frac{P_2}{P_3}\cos x\,dx$$

D'où $$\int f(\sin x, \cos x)\,dx = \int \frac{P_2(\sin x)}{P_3(\sin x)}\cos x\,dx = \int \frac{P_2(t)}{P_3(t)}\,dt$$

— Si $f(\sin x, \cos x)\,dx$ ne change pas lorsqu'on change x en $-x$ on pose $\cos x = t$ car les Q_i étant des polynomes en $\cos x$.

$$\frac{Q_1 + \sin x\, Q_2}{Q_3 + \sin x\, Q_4}\,dx = -\frac{Q_1 - \sin x\, Q_2}{Q_3 - \sin x\, Q_4}\,dx = \frac{Q_2}{Q_3}\sin x\,dx$$

— Si $f(\sin x, \cos x)\,dx$ ne change pas lorsqu'on remplace x par $\pi + x$ on pose $\operatorname{tg} x = t$ car les R_i étant des polynomes en $\cos^2 x$.

$$f = \frac{R_1 + \sin x \cos x\, R_2 + \sin x\, R_3 + \cos x\, R_4}{R_5 + \sin x \cos x\, R_6 + \sin x\, R_7 + \cos x\, R_8}$$

$$= \frac{R_1 + \sin x \cos x\, R_2 - \sin x\, R_3 - \cos x\, R_4}{R_5 + \sin x \cos x\, R_6 - \sin x\, R_7 - \cos x\, R_8} = \frac{R_1 + \sin x \cos x\, R_2}{R_5 + \sin x \cos x\, R_6}$$

$$= \frac{R_1 \operatorname{tg} x + \sin^2 x\, R_2 \operatorname{tg} x}{R_5 \operatorname{tg} x + \sin^2 x\, R_6 \operatorname{tg} x}$$ qui s'exprime en t.

— Si $f(\sin x, \cos x)\,dx$ ne change ni lorsqu'on remplace x par $-x$, ni lorsqu'on remplace x par $\pi - x$, on a en reprenant l'expression précédente de f

$$f = \frac{R_1 + \sin x \cos x\, R_2 + \sin x\, R_3 + \cos x\, R_4}{R_5 + \sin x \cos x\, R_6 + \sin x\, R_7 + \cos x\, R_8}$$

$$= -\frac{R_1 - \sin x \cos x\, R_2 + \sin x\, R_3 - \cos x\, R_4}{R_5 - \sin x \cos x\, R_6 + \sin x\, R_7 - \cos x\, R_8}$$

$$= \frac{\sin x \cos x R_2 + \cos x R_4}{R_5 + \cos x R_7} = \frac{\sin x \cos x R_2 - \cos x R_4}{R_5 - \sin x R_7}$$

$$= \frac{\sin x \cos x R_2}{R_5}$$

Soit $\int f\, dx = \frac{R_2}{R_5} \frac{\frac{1+\cos x}{2}}{\frac{1+\cos 2x}{2}} x - \frac{1}{4} d \cos 2x$

On pourra poser $\cos 2x = t$.

80 Expression irrationnelles:

Si f est une fraction rationnelle de x et d'un radical y on cherche une representation parametrique de la courbe C decrite par le point M, fonction de x et y.

Exemple: * C a pour équation $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

on prend y comme nouvelle variable.

* Si $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, C est une conique.

Pour $a<0$, c'est une ellipse d'equation reduite:

$$\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{avec} \begin{cases} X = x + \frac{b}{2a} = \alpha \cos\varphi \\ Y = y = \beta \sin\alpha \end{cases}$$

$a>0$, c'est une hyperbole: la representation parametrique utilise $\operatorname{sh}\varphi$ et $\operatorname{ch}\varphi$. On peut aussi couper par une parallele à une assymptote, variable.

D'une facon generale si C est unicursale on utilise une representation paramétrique rationnelle

$$x = x(t) \qquad y = y(t)$$

f devenant une fraction rationnelle en t

81 Convergence des intégrales:

① Si f est intégrable sur $[a\ X]$ $\forall X > a$ et si $\int_a^X f\,dx$ a une limite quand $X \to +\infty$ cette limite se notte $\int_a^{+\infty} f\,dx$.

C'est le cas lorsque $0 < f(x) < \dfrac{A}{x^m}$ $m > 1$ pour $x > x_0$

car $\displaystyle\int_a^X f\,dx < A\int_{x_0}^X x^{-m} = A\left[\frac{x^{-m+1}}{-m+1}\right]_{x_0}^X$

$$= A\,\frac{X^{1-m} - x_0^{\,1-m}}{1-m}$$

quand $X \to +\infty$ cette expression tend vers $A\,\dfrac{x_0^{\,1-m}}{m-1}$

Si $f(x) > \dfrac{A}{x^m}$ avec $m \leq 1$ $A > 0$ pour $x > x_0$ le même raisonnement montre que $\int_a^X f\,dx \to +\infty$

(Il y a divergence sur R, convergence sur $\overline{R}$)

NB: Etudes et resultat analogue quand $x \to -\infty$ pour $\int_X^a f\,dx$.

⑪ Si f est intégrable sur tout segment intérieur à $]a\ b]$ et tend vers l'infini quand x tend vers $a+0$ et si $\int_{a+\varepsilon}^b f\,dx$ a une limite quand $\varepsilon \to +0$, cette limite se notte $\int_a^b f\,dx$.

C'est le cas lorsque $0 < f(x) < \dfrac{A}{(x-a)^m}$ avec $m < 1$

Si $f(x) > \dfrac{A}{(x-a)^m}$ $A > 0$ $m \geq 1$, $\int_{a+\varepsilon}^b f\,dx \to +\infty$ quand $\varepsilon \to +0$.

(Il y a divergence sur R, convergence sur $\overline{R}$)

82 <u>Retour sur la formule de Taylor-Lagrange</u>

Si f admet des dérivées continues sur $[ab]$ jusqu'à l'ordre $n+1$ on a

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b f^{(n+1)}(x) \frac{(b-x)^n}{n!} dx$$

La formule est évidente pour $n = 0$.

Supposons qu'elle soit vérifiée pour la valeur $n-1$ de l'indice. Une intégration par partie donne :

$$\int_a^b f^{(n)}(x) \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} dx = \left[-\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) \right]_a^b + \int_a^b f^{(n+1)}(x) \frac{(b-x)^n}{n!} dx$$

$$= \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \text{———}$$

<u>Remarque</u> : Les formules de changement de variables et d'intégration par partie pour une intégrale définie s'étendent par passage à la limite au cas où les intégrales introduites sont des intégrales généralisées au sens du paragraphe 81

Cette remarque vaut aussi pour la formule de Taylor Lagrange où $f^{(n+1)}(x)$ peut être supposée continue sur $]ab[$ pourvu que $\int_a^b f^{(n+1)}(x) \frac{(b-x)^n}{n!} dx$ soit convergente.

Équations différentielles.

83 Généralités sur les équations du premier ordre:

On considerera l'equation differentielle $f(x\,y\,y')=0$ comme "intégré" quand on aura determiné les courbes intégrales dans l'espace affine $\mathcal{E}_2$ sur R, c'est à dire les courbes en tous points desquelles $x\,y$ et le coefficient angulaire y' de la tangente sont liées par cette relation. La solution pourra donc se presenter sous la forme $y=\varphi(x)$ ou $\varphi(x,y)=0$ ou encore être definie par une representation parametrique. L'integrale générale est celle qui permettra d'obtenir toutes les solutions, sauf un nombre fini, en donnant à un paramètre des valeurs particulières. Toute solution ne rentrant pas dans l'integrale generale sera dite singulière. En particulier, si l'intégrale generale est constituée par une famille de courbes admettant une enveloppe, celle ci est une solution generalement singulière.

84 Variables séparables:

Soit l'equation $P(x,y)+Q(x,y)\,y'=0$ et supposons que $P\,dx+Q\,dy$ soit differentielle totale d'une fonction $u(x,y)$. Si $y=\varphi(x)$ est une solution, alors la fonction:

$$\Phi(x)=U(x,\varphi(x)) \text{ admet une derivée:}$$

$$\Phi'(x)=u'_x(x\,\varphi)+u'_y(x,\varphi)\,\varphi' = P(x,\varphi)+Q(x,\varphi)\,\varphi'$$

$\Phi'(x)$ est nul sur un intervalle I, donc $\Phi(x)$ est constante sur I : réciproquement si $u(x,y)$ est égal à C et si $u'_y \neq 0$, il existe une fonction implicite $y(x)$ tel que $u'(x,y) = 0$ soit $u'(x) + u'(y)\, y' = 0$

et $P + Q y' = 0$

En particulier l'équation à variable separée $\boxed{P(x) = Q(y)\, y'}$ admet une solution :

$$\int P(x)\, dx = \int Q(y)\, dy + C$$

NB : On a supposé evidemment P et Q continue.

85 Equation homogène :

C'est une équation de la forme $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$

On recherche pour cette équation une representation parametrique avec $t = \frac{y}{x}$ comme paramètre.

De $y = tx$ on tire $dy = x\,dt + t\,dx$

et $t + x\frac{dt}{dx} = f(t)$. $\Rightarrow f(t) - t = x\frac{dt}{dx}$

Si t_0 est racine de l'equation $f(t) - t = 0$ la droite d'equation $y = t_0 x$ est une intégrale. Pour toute autre valeur de t l'equation s'écrit :

$$\frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x} \text{, equation à variables separées.}$$

$$\int \frac{dt}{f(t)-t} = \text{Log}|x| + C \Rightarrow \text{Log}|x| = \Phi(t) + C_1$$

$$\Rightarrow x = \pm e^{C_1} e^{\Phi(t)}$$

$$\Rightarrow x = \lambda e^{\Phi(t)}$$

Finalement $y = \lambda t e^{\Phi(t)}$ $\lambda \in R^*$

NB : les courbes integrales sont homothetiques les unes des autres par rapport à l'origine.

Equations linéaires :

C'est une equation de la forme : $\boxed{a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)}$ (I)

Soit E l'ensemble des fonctions définies sur un intervale E et E_1 l'ensemble des fonctions dérivables sur I. E_1 est un sous espace vectoriel de E. L'application $\mathcal{F}(E_1)$. dans E tel que $y \xrightarrow{\mathcal{F}} a(x)\,y' + b(x)\,y$ est linéaire.

Resoudre l'equation (I) c'est cherché les antecedents de $c(x)$.

— Si $c=0$ l'équation sans second membre ; $a(x)\,y' + b(x)\,y =$ admet des solutions qui sont le noyau de $\mathcal{F}$. On reconnait d'abord la solution banale $y=0$. Si $y \neq 0$ et $a \neq 0$ l'equation s'ecrit :

$$\frac{dx}{y} = -\frac{b}{a}\,dx .$$

d'où $\quad \log|y| = -\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx + C \Rightarrow y = \lambda\, e^{-\int \frac{b}{a}dx}$

En prenant $\lambda \in \mathbb{R}$ la forme de y recupere la solution banale pour $\lambda = 0$

NB : Pour $\lambda \neq 0$ y ne s'annule pas sur I ce qui justifie à postiori le calcul d'integration. Ceci montre que le noyau de $\mathcal{F}$ est de dimension 1. Donc si on connait a priori une solution non banale y_1, l'integrale générale est μy_1

— Si $c \neq 0$ $\forall x$ sauf un nombre fini de valeurs x_i. on considere l'equation sans second membre associé. (II)

Si y_1 est une solution non banale de (II), on pose :

$$y = y_1\,\mu(x) \quad \text{(Methode de variation de la constante)}$$

D'où $\quad y' = y_1'\,\mu(x) + \mu'(x)\,y_1$

et $\quad a\left(y_1'\,\mu(x) + y_1\,\mu'(x)\right) + b\,y_1\,\mu(x) = c$

$$a\,y_1\,\mu'(x) = c$$

$$u(x) = \int \frac{c}{ay_1}\, dx + K$$

et $$y = y_1 \int \frac{c}{ay_1}\, dx + K y_1 = \mathcal{C}(x) + K y_1$$

$\mathcal{C}(x)$ est la solution particulière de l'équation complète obtenue pour $K=0$. Ky_1 est l'intégrale générale de l'équation (II).

Réciproquement si on connaît à priori une intégrale particulière u de l'équation complète. Posons

$$y = u + z$$

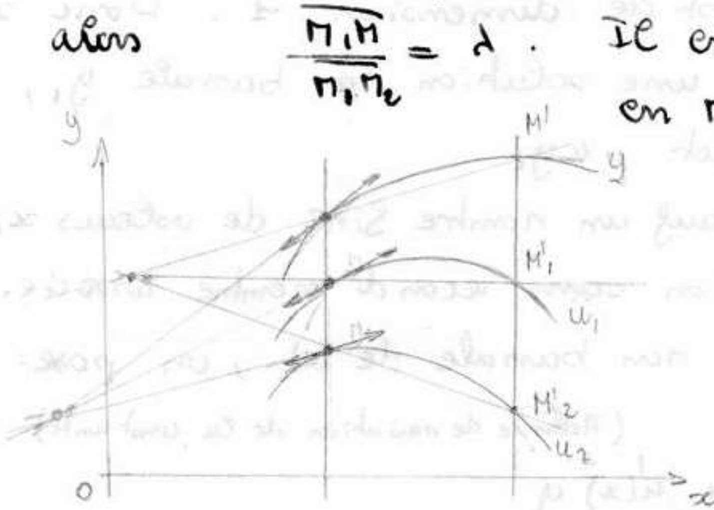
Il vient $az' + bz = 0$. z est l'intégrale générale de (II).

<u>Remarques</u>:

① Si u_1 et u_2 sont deux intégrales particulières de (I) et y l'intégrale générale, z une intégrale non banale de l'équation (II)

$$\begin{cases} y = u_1 + k_1 z \\ u_2 = u_1 + k_2 z \end{cases} \Rightarrow \frac{y-u_1}{u_2-u_1} = \frac{k_2}{k_1} = \lambda$$

Si une droite variable parallèle à Oy rencontre les trois courbes intégrales $u_1\ u_2\ y$ en $M_1 M_2 M$, nous avons alors $\frac{\overline{M_1M}}{\overline{M_1M_2}} = \lambda$. Il en résulte que les tangentes en $M_1 M_2 M$ sont concourantes.



② Si le second membre de l'équation (I) est de la somme $\sum_1^n \alpha_i e_i(x)$ et si u_i est la solution par-

ticulière de l'équation $a(x)\,y' + b(x)\,y = c_i(x)$,
$\sum_1^n \alpha_i u_i$ est une solution de (1)

(iii) Si une équation du premier ordre est écrite sous la forme $\alpha(x,y)\,dy + \beta(x,y)\,dx = 0$ il y a lieu de voir si $x = \text{cte}$ est solution. Ainsi pour une équation linéaire écrite sous la forme :

$$a(x)\,dy + [\,b(x)\,y - c(x)\,]\,dx = 0$$

les droites $x = x_0$ où x_0 est racine de $c(x) = 0$, sont des intégrales singulières.

87 Équations de Bernouilli et Riccati:

(i) $\boxed{y' + a(x)\,y + b(x)\,y^n = 0}$: a et b sont des fonctions continues de x, $n \neq 1$. Cette équation admet la solution banale $y = 0$. Si $y \neq 0$ on a $\frac{y'}{y^n} + a(x)\,y^{1-n} + b(x) = 0$. En posant $z = y^{1-n}$ il vient $\frac{1}{1-n}z' + a(x)\,z + b(x) = 0$: (Équation linéaire que l'on sait résoudre)

(ii) $\boxed{y' + a(x)\,y + b(x)\,y^2 = c(x)}$ a, b et c sont des fonctions continues de x. Cette équation peut être intégré si l'on connaît à priori une solution particulière y_1. Posons en effet: $y = y_1 + z$

Alors $\cancel{y_1'} + z' + \cancel{a(x)\,y_1} + a(x)\,z + \cancel{b(x)\,y_1^2} + 2b(x)\,y_1 z + b(x)\,z^2 = \cancel{c(x)}$

Soit $z' + [\,a(x) + 2b(x)\,y_1\,]\,z + b(x)\,z^2 = 0$

(Équation de Bernouilli).

NB: Si $y_1\,y_2\,y_3\,y_4$ sont des solutions particulières de l'équation de Riccatti,

$\frac{1}{y_2 - y_1}$, $\frac{1}{y_3 - y_1}$, $\frac{1}{y_4 - y_1}$ sont trois solutions d'une equation linéaire. Il en resulte que le birapport $(y_1\, y_2\, y_3\, y_4)$ est constant

88 Equation de Lagrange et Clairaut:

1) $\boxed{y = x f(y') + g(y')}$. On cherche une representation paramétrique en prenant $y' = t$. Pour que C soit une courbe intégrale, il faut et il suffit que:

$dy = t\, dx$ en chaque point de C.

C'est à dire que $\quad y = x f(t) + g(t)$

$$f(t)\, dx + x f'(t)\, dt + g'(t)\, dt = t\, dx$$

$$[f(t) - t]\, dx + x[f'(t) + g'(t)]\, dt = 0$$

si $dt \neq 0$ $\quad x$ est determiné par l'equation linéaire

$$[f(t) - t] x' + f'(t) x = -g'(t)$$

A l'integrale générale de cette équation s'ajoutent eventuellement les droites correspondant à t_0, t_0 racine de $f(t) - t$.

2) $\boxed{y = xy' + g(y')}$ est une equation de Lagrange particuliere. La methode generale donne:

$[x + g'(t)]\, dt = 0$

Cette equation se decompose en

① $dt = 0 \Rightarrow t = \lambda$ et $y = \lambda x + g(\lambda)$ (droites)

② $x = -g'(t) \Rightarrow y = -t g'(t) + g(t)$

NB: On verra que cette courbe est l'enveloppe des droites $y = \lambda x + g(\lambda)$. Les solutions sont donc une courbe et ses tangentes.

89 Equations differentielles lineaires du 2° ordre:

L'equation $\boxed{a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = d(x)}$ où abcd sont des fonctions continues de x sur un intervale I s'interprète comme equation du premier ordre au moyen de l'operateur linéaire $\mathcal{T}$ definie par:

$$\mathcal{T}(y) = a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y$$

Opérateur appliquant l'espace vecteriel des fonctions deux fois derivables sur I dans le sur-espace des fonctions definies sur I.

NB: Cette interpretation vaudrait pour une equation linéaire d'ordre quelconque

① L'equation sans second membre:

$$a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = 0 \quad (11)$$

admet la solution banale $y = 0$. Deux solutions y_1 et y_2 sont lineairement dependantes s'il existe deux constantes λ_1 et λ_2, non nulles toutes deux telles que $\forall x \in I \quad \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$

Ceci entraine $\forall x \in I \quad \lambda_1 y'_1 + \lambda_2 y'_2 = 0$

donc $y_1 y'_2 - y'_1 y_2 = 0 \quad \forall x \in I$ car le systeme homogene $\begin{cases} \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0 \\ \lambda_1 y'_1 + \lambda_2 y'_2 = 0 \end{cases}$ admet une solution non banale.

Reciproquement: Si y_1 n'est pas banale:

$$y_1 y'_2 - y'_1 y_2 = 0 \implies \frac{y'_1}{y_1} = \frac{y'_2}{y_2} \implies y_2 = \lambda y_1$$

(Conclusion analogue si y_1 est banale, y_2 ne l'etant pas: $y_1 = \mu y_2$)

Enfin si y_1, y_2 sont banales la dependance est triviale.

En conclusion pour que deux solutions y_1, y_2

soit linéairement indépendantes, il faut et il suffit que $y_1 y_2' - y_1' y_2$ ne soit pas identiquement nul sur I.

Si on connaît deux solutions linéairement indépendantes y_1 et y_2 de (11) posons $y = uy_1 + vy_2$. Il vient $y' = u'y_1 + v'y_2 + uy_1' + vy_2'$. Imposons à u et v la condition $u'y_1 + v'y_2 = 0$, alors

$$y' = uy_1' + vy_2'$$
$$y'' = u'y_1' + v'y_2' + uy_1'' + vy_2''$$

L'équation devient :

$$a(u'y_1' + v'y_2' + uy_1'' + vy_2'') + b(uy_1' + vy_2') + c(uy_1 + vy_2) = 0$$
$$u\underbrace{(ay_1'' + by_1' + cy_1)}_{0} + v\underbrace{(ay_2'' + by_2' + cy_2)}_{0} + \underset{\neq 0}{a}(u'y_1' + v'y_2') = 0$$

d'où $\begin{cases} u'y_1 + v'y_2 = 0 \\ u'y_1' + v'y_2' = 0 \end{cases}$

Ce système qui fournit les solutions u' et v' a un déterminant non nul. Il n'admet donc que la solution banale $u' = v' = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = c^{te} \\ v = c^{te} \end{cases}$

L'intégrale générale de (11) est donc $\lambda y_1 + \mu y_2$. Ceci prouve que le noyau de $\mathcal{T}$ est de dimension (11) (moyennant l'existence de y_1 et y_2)

(II) Pour l'équation complète, si on connaît une solution particulière y_1 on pose $x = y_1 + z$. où z est l'intégrale générale de (11). Comme pour le premier ordre, si $d(x) = \sum_1^n \lambda_i d_i(x)$ et si l'on connaît une intégrale de $ay'' + by' + cy = d_i$,

$\sum_1^n \lambda_i u_i$ est solution de (1).

Si on connait une integrale y_1 de l'equation sans second membre on pose $y = y_1 z$ ce qui ramène à l'equation linéaire du premier ordre en z' : $a y_1 z'' + (2a y_1' + b y_1) z' = d$

Si on connait deux integrales particulieres independantes y_1 et y_2 de l'equation sans second membre on pose $y = u y_1 + v y_2$ et on lie u et v par $u' y_1 + v' y_2 = 0$. On est ramené aux quadratures, (variations des constantes).

9o Equation linéaire à coefficients constants:

On cherche une solution de (11) sous la forme e^{rx}, r est solution de l'equation caracteristique $ar^2 + br + c = 0$. Si les racines r_1 et r_2 sont reelles et distinctes on a deux solutions linéairement independantes $e^{r_1 x}$, $e^{r_2 x}$. Par contre si r_1 et r_2 sont complexes on pose $\begin{cases} r_1 = \alpha + i\beta \\ r_2 = \alpha - i\beta \end{cases}$

on verifie que $e^{\alpha x} \cos \beta x$ et $e^{\alpha x} \sin \beta x$ sont solutions independantes. Enfin si r est racine double $y = e^{rx} z$: il vient $z'' = 0$.

D'où $y = e^{rx} (\lambda x + \mu)$. Dans tous les cas on connait deux integrales independantes de (11)

geometrie differentielle affine et projective.

91 Introduction:

Soit un espace affine $\mathcal{E}_n$ sur R. Si les coordonnees x'_i de M dans le repere $\{O' \vec{e'_i}\}$ sont des fonctions d'un parametre reel t et si elles admettent des limite l'_i quant $t \to t_0 \in \bar{R}$, la relation $X = AX' + B$ montre que les coordonnees x_i de M dans tout autre repere $\{O\ \vec{e_i}\}$ ont des limites l_i e que $L = AL' + B$: les matrices L et L' etant liées par cette relation, elle represente un même point $\underline{P}$ de l'espace affine dans les deux reperes. Le point sera appelé <u>limite</u> de M quant $t \to t_0$. La fonction vectorielle $\overrightarrow{OM}(t)$ a pour limite $\overrightarrow{OP}$ en convenant d'itentifier la limite du vecteur libre $\overrightarrow{OM}$ avec celle du point topologique (M) de R_n qui le represente dans un repere donnè.

92 Derivation vectorielle:

$\vec{u}$ etant fonction de t, sa derivee est la limite eventuelle de $\frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t}$ quand $\Delta t \to 0$.

$$\frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t}$$

Si $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ on definit la <u>vitesse</u> et l'<u>acceleration</u>

du point M comme étant la dérivée vectorielle première et seconde de $\vec{u}$

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{u}}{dt} \quad \text{(vitesse de M)}$$
$$\vec{u}'' = \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} \quad \text{(accélération de M)}$$

<u>En passant aux composantes</u>: dans un repère donné, on obtient: $(\vec{u}+\vec{v})' = \vec{u}' + \vec{v}'$

$$\left[\lambda(t) \cdot \vec{u}(t)\right]' = \lambda'\vec{u} + \lambda\vec{u}'$$

Si $\vec{u}(t)$ admet des dérivées jusqu'à l'ordre p en t_0 on peut écrire dans un repère, la formule de Taylor-Young:

$$\vec{u}(t_0+\Delta t) = \vec{u}(t_0) + \Delta t\, \vec{u}'(t_0) + \dots + \frac{\Delta t^p}{p!}\left[\vec{u}^{(p)}(t_0) + \vec{\varepsilon}\right]$$

<u>NB</u>: La formule de Taylor Lagrange ne s'étend pas aux fonctions vectorielles car les θ_i relatifs aux développements des x_i sont en général différents.

93 <u>Tangente à une courbe de E_n en un point</u>:

Une courbe C est le lieu de M tel que $\vec{OM} = \vec{OM}(t)$.
La tangente en M_0 est la limite éventuelle de la droite M_0M.
Supposons que $\vec{OM} = \vec{OM_0} + \frac{\Delta t^p}{p!}\left[\vec{M}^{(p)}(t_0) + \vec{\varepsilon}\right]$

$$= \vec{OM_0} + \frac{\Delta t^p}{p!}\left[\vec{M_0}^{(p)} + \vec{\varepsilon}\right]$$

ce qui exprime que la fonction vectorielle $\vec{OM}(t)$ est dérivable en M_0 jusqu'à l'ordre p. $\vec{M_0}^{(p)}$ étant la première dérivée non nulle en M_0.

La droite M_0M porte le vecteur:

$$\frac{p!}{\Delta t^p}\vec{M_0M} = \vec{M_0}^{(p)} + \vec{\varepsilon}$$ qui tend vers $\vec{M_0}^{(p)}$ quand $\Delta t \to 0$. La tangente en M_0 est donc le support du vecteur $\vec{M_0}^{(p)}$!

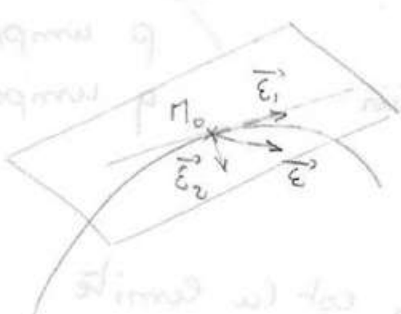
Si $p=1$ $\quad M_0$ est dit ordinaire

Si $p>1$ $\quad M_0$ est dit stationnaire

(Remarquer que cette notion, est relative à la representation parametrique adopté)

94 <u>Position de la courbe par rapport à une variete lineaire secante</u>: (Hyperplan)

Soit un hyperplan Δ passant par M_0. Decomposons $\vec{\varepsilon}$ en $\vec{\varepsilon}_1$ colineaire à $\vec{M}_0^{(p)}$ et $\vec{\varepsilon}_2$ suivant Δ.



Pour $|\Delta t|$ assez petit nous avons

$$\left|\frac{\vec{\varepsilon}_1}{\vec{M}_0^{(p)}}\right| < 1$$

$\vec{M}_0^{(p)} + \vec{\varepsilon}_1$ est alors de meme sens que $\vec{M}_0^{(p)}$

$\vec{M}$ est donc du meme cote de Δ que le point P definit par

$$\overrightarrow{M_0 P} = \frac{\Delta t^p}{p!} \vec{M}_0^{(p)}$$

Si p est impair, M traverse Δ quand Δt change de signe, si p est pair M ne traverse pas Δ ; il y a <u>rebroussement</u>.

95 <u>Position d'une courbe plane par rapport à la tangente</u>.

Si $\vec{M}_0^{(q)}$ est la premiere derivee non colineaire à $\vec{M}_0^{(p)}$, on peut ecrire :

$$\overrightarrow{M_0 M} = \frac{\Delta t^p}{p!}\left[\vec{M}_0^{(p)} + \vec{\alpha}_1\right] + \frac{\Delta t^q}{q!}\left[M_0^{(q)} + \vec{\alpha}_2\right]$$

$\vec{\alpha}_1$ etant colineaire à $\vec{M}_0^{(p)}$

$\vec{\alpha}_1$ et $\vec{\alpha}_2$ tendant vers $\vec{0}$ avec $\Delta t \to 0$

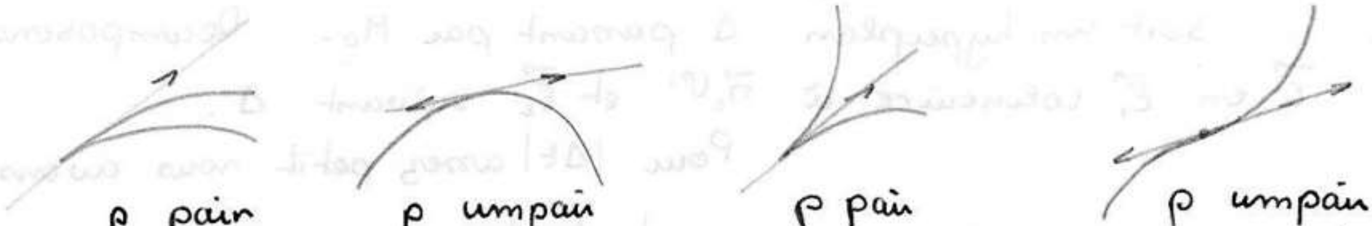
Là encore pour $|\Delta t|$ assez petit M est du même coté de la tangente que le point Q definit par:

$$\overrightarrow{M_0Q} = \frac{\Delta t^q}{q!} \overrightarrow{M_0}^{(q)}$$

Si q est pair M ne traverse pas la tangente

Si q est impair M traverse la tangente.

Nous avons finalement les diverses representations possible:



p pair	p impair	p pair	p impair
q pair	q pair	q impair	q impair

96 Plan Osculateur:

Le plan osculateur P en M_0 est la limite eventuelle du plan passant par la tangente M_0T et le point $M(t_0+\Delta t)$ quant Δt tend vers 0. Avec les memes notations qu'au § 95, ce plan contient le vecteur $\overrightarrow{M_0M} - \frac{\Delta t^p}{p!}\left[\overrightarrow{M_0}^{(p)} + \vec{\alpha}_1\right] = \frac{\Delta t^q}{q!}\left[\overrightarrow{M_0}^{(q)} + \vec{\alpha}_2\right]$, donc le vecteur $\overrightarrow{M_0}^{(q)} + \vec{\alpha}_2$ dont la limite est $\overrightarrow{M_0}^{(q)}$. Pour $|\Delta t|$ assez petit M et Q sont d'un même coté d'un plan quelconque passant par M_0T et distinct de P. Donc M traverse un tel plan en M_0 si q est impair et ne le traverse pas si q est pair. En appellant $\overrightarrow{M_0}^{(r)}$ le premier vecteur derivee, non situé dans P, on a:

$$\overrightarrow{M_0M} = \frac{\Delta t^p}{p!}\left[\overrightarrow{M_0}^{(p)} + \vec{\alpha}_1\right] + \frac{\Delta t^q}{q!}\left[\overrightarrow{M_0}^{(q)} + \vec{\beta}_1\right] + \frac{\Delta t^r}{r!}\left[\overrightarrow{M_0}^{(r)} + \vec{\beta}_2\right]$$

α_1 étant colinéaire à $\vec{M}_0^{(p)}$

β_2 situé dans $\mathcal{P}$

En raisonnant comme plus haut, on voit que M traverse $\mathcal{P}$ en M_0 si r est impair, ne le traverse pas si r est pair

97 Changement de paramètre :

– La notion de point ordinaire ou stationnaire est relative à la représentation paramétrique adoptée.

En effet supposons que $t = \varphi(\lambda)$:

$$\vec{M}'_\lambda = \vec{M}'_t\,\varphi' = \vec{M}'_t\,\frac{dt}{d\lambda} \quad (\text{cf: composantes})$$

Or si en M_0 $\quad \vec{M}'_t \neq \vec{0}$ et $\dfrac{dt}{d\lambda} = 0$ on a $\vec{M}'_\lambda = \vec{0}$

et le point M_0 apparait comme ordinaire pour une représentation et stationnaire pour l'autre.

Pour lever cette difficulté, nous n'autoriserons que des changements de variables $t = \varphi(\lambda)$, tels que les dérivées successives de $\varphi(\lambda)$ soit définies en M_0 avec $t'_0 \neq 0$ jusqu'à l'ordre nécessité par la question étudiée :

(p au § 94 $\quad q$ au § 95 $\quad r$ au § 96)

– $\dfrac{d^p\vec{M}}{d\lambda^p}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\dfrac{d^s\vec{M}}{dt^s}$

où $1 \leq s \leq p$. Si $\vec{M}'_t\ \vec{M}''_{t^2} \dots \vec{M}^{(p-1)}_{t^{p-1}}$ sont nuls en M_0, il en est de même de $\vec{M}'_\lambda\ \vec{M}''_{\lambda^2} \dots \dots \vec{M}^{(p-1)}_{\lambda^{p-1}}$.

Si en plus des conditions précédentes $\vec{M}^{(p)}_{t^p} \neq 0$, alors $\vec{M}^{(p)}_{\lambda^p} = \vec{M}^{(p)}_{t^p}\, t'^p \neq 0$ et $\vec{M}^{(p)}_{\lambda^p}$ et $\vec{M}^{(p)}_{t^p}$ sont colinéaires.

La tangente définie par λ coïncide donc avec la tangente définie par t

De même si $\vec{M}^{(q)}_{t^q} = \frac{d^q \vec{M}}{dt^q}$ est le premier vecteur dérivé non colinéaire à $\vec{M}^{(p)}_{t^p}$, le vecteur $\vec{M}^{(q)}_{\lambda^q}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{M}^{(s)}_{t^s}$ où $1 \leq s \leq q$. Tous les vecteurs sauf $\vec{M}^{(q)}_{t^q}$ sont colinéaires à $\vec{M}^{(p)}_{t^p}$ donc à $\vec{M}^{(p)}_{\lambda^p}$; $\vec{M}^{(q)}_{\lambda^q}$ est en définitive la résultante de deux vecteurs, l'un porté par la tangente, l'autre ; $\vec{M}^{(q)}_{t^q} \cdot t'^q_0 \neq \vec{0}$ n'étant pas colinéaire au précédent. C'est lui qui définit avec la tangente le plan osculateur pour la représentation $\vec{M}(\lambda)$. Comme il est coplanaire avec $\vec{M}^{(p)}_{t^p}$ et $\vec{M}^{(q)}_{t^q}$ les deux plans osculateurs sont confondus.

Les notions de tangentes et de plans-osculateurs ainsi que les propriétés morphologiques de la courbe au voisinage d'un point sont donc intrinsèque.

98 Courbe de $\mathcal{E}_3$ tracée sur une surface :

Si $\vec{M} = \vec{M}(u, v)$ $\vec{M}$ décrit dans $\mathcal{E}_3$ une surface S (à moins que $\vec{M}$ ne dépende de u et v que par l'intermédiaire d'une seule fonction composante)

Les courbes $u = c^{te}$ et $v = c^{te}$ sont les courbes coordonnées.

Soit un point $M_0 (u_0\, v_0)$ de S en lequel les vecteurs $\vec{M}'_v = \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$ et $\vec{M}'_u = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ ne sont ni nuls ni colinéaires. Ils déterminent un plan $\mathcal{P}$. Une courbe C tracée sur S et passant par M_0 sera définie par

$$u = u(t) \quad \text{et} \quad u(t_0) = u_0$$
$$v = v(t) \quad\quad\quad v(t_0) = v_0$$

Si $u'(t_0) = u'_0$ et $v'(t_0) = v'_0$ ne sont pas tous deux nuls, C admet en M_0 une tangente dirigée par

$\vec{M}'_t = \vec{M}'_u\, u'_0 + \vec{M}'_v\, v'_0$. Elle est donc située dans P, que nous appellerons plan tangent à S en M_0.
Si $\vec{M}'_u$ et $\vec{M}'_v$ sont colinéaires, avec les mêmes hypothèses sur u et v, $\vec{M}'_t$ est colinéaire à $\vec{M}'_u$. On dira que M_0 est un point pincé.

NB: (On exclut le cas où M_0 étant ordinaire sur S, les courbes coordonnées seraient tangentes en M_0 ; il y aurait alors singularité de la représentation et non de la surface. On éliminerait cette singularité artificielle en changeant le paramétrage)

Si toutes les dérivées partielles de $M(u,v)$ sont nulles en M_0 jusqu'à l'ordre p-1, les dérivées d'ordre p n'étant pas toutes nulles, on établit aisément par récurrence la relation:

$$M_{t^p}^{(p)} = \sum_{r=0}^{p} C_p^r\, \vec{M}^{(p)}_{u^r v^{p-r}}\, u_0'^{\,r}\, v_0'^{\,p-r}$$

La tangente à C en M_0 appartient à un cône qui peut d'ailleurs se réduire à un plan ou à une droite.

99 Enveloppes de droites dans le plan:

Soit D_λ une droite variable définie par son équation $u(\lambda)x + v(\lambda)y + w(\lambda) = 0$. On cherche sur D_λ un point M_λ fonction de λ tel que la courbe (C) décrite par M_λ quand λ varie soit tangente en M_λ à D_λ. (C) sera définie par

$$\begin{cases} x = \varphi(\lambda) \\ y = \psi(\lambda) \end{cases}$$

Si φ' et ψ' ne sont pas toutes deux simultanément nulles, il faut et il suffit que $u\varphi' + v\psi' = 0$ (1)

Or pour tout λ, M_λ appartient à D_λ, donc :

$$u\varphi(\lambda) + v\psi(\lambda) + w = 0$$

d'où en dérivant et en tenant compte de (1)

$$\underbrace{u\varphi' + v\psi'} + u'\varphi + v'\psi + w' = 0 \implies u'\varphi + v'\psi + w' = 0$$

φ et ψ satisfont donc au système :

$$\begin{cases} u\varphi + v\psi + w = 0 \\ u'\varphi + v'\psi + w' = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Inversement si ce système est régulier la solution satisfait quelque soit λ à $u\varphi + v\psi + w = 0$, d'où en dérivant et en tenant compte de (2)

$$\underbrace{u'\varphi + v'\psi + w'}_{0} + u\varphi' + v\psi' = 0$$

$$u\varphi' + v\psi' = 0 \quad (1)$$

le point M_λ obtenu est dit caractéristique de D_λ, son lieu est l'enveloppe

100 Droites et points stationnaires

Si le système $\begin{cases} D_\lambda = 0 \\ D'_\lambda = 0 \end{cases}$ (où l'on pose $D'_\lambda = u'_{(\lambda)} x + v'_{(\lambda)} y + w'(\lambda)$) est indéterminé, la résolution du système fournit tous les points de D_λ. Ils ne sont pas fonction de λ et le raisonnement précédent est en défaut. Mais si λ_0 est une valeur de λ pour laquelle il en est ainsi, alors M_λ a une position limite lorsque λ tend vers λ_0 : soit M_0. En effet φ et ψ ont été supposés dérivables et par suite continus

La fonction composée $u(\lambda)\varphi(\lambda) + v(\lambda)\psi(\lambda) + w(\lambda)$ est continue or au voisinage de λ_0 elle est nulle. Sa limite lorsque $\lambda \to \lambda_0$ est 0, ce qui prouve que M_0 est sur D_{λ_0} et comme M_0 vérifie (1) (pour la même raison qu'au § 99) D_{λ_0} est tangente en (C) à M_0. D_{λ_0} est droite stationnaire de la famille.

Comme exemple donnons nous une courbe $y = f(x)$ et cherchons l'enveloppe de ses tangentes. L'équation générale de ces tangentes est $y - x f'(\lambda) + \lambda f'(\lambda) - f(\lambda) = 0$

Soit $y - (x-\lambda) f'(\lambda) - f(\lambda) = 0$. Les points caractéristiques s'obtiennent en dérivant par rapport à λ. Il vient :

$$(x-\lambda) f''(\lambda) = 0$$

* Si $f''(\lambda) \neq 0$ on obtient $x = \lambda$ et $y = f(\lambda)$
* En un point d'inflexion $f''(\lambda) = 0$, alors x est indéterminé : la tangente d'inflexion est donc une droite stationnaire dans la famille des tangentes. Son point de contact s'obtient en faisant tendre λ vers l'abscisse du point d'inflexion. C'est donc le point d'inflexion lui même.

Si $\varphi' = \psi' = 0$ la tangente à C est définie par $\varphi^{(p)}$ et $\psi^{(p)}$ avec $p > 1$ - Or tout point de C vérifie $u\varphi' + v\psi' = 0$. En dérivant $p-1$ fois cette relation il vient au point stationnaire $u\varphi^{(p)} + v\psi^{(p)} = 0$. Ce qui prouve que la tangente à C en ce point est encore D_λ

101 Généralisation :

Pour une courbe C_λ définie par $f(x y \lambda) = 0$ nous supposerons que f'_x et f'_y existent et sont continues. Le contact de C_λ avec l'enveloppe Γ en M_λ s'écrit : $f'_x \varphi' + f'_y \psi' = 0$, à condition toutefois.

qui en M_λ, f'_x et f'_y d'une part et φ' et ψ' d'autre part ne soient pas simultanément nulles. Or pour tout λ $f(\varphi, \psi, \lambda) = 0$ donc $f'_x \varphi' + f'_y \psi' + f'_\lambda = 0$ d'où $f'_\lambda = 0$.

Inversement si le système $f = f'_\lambda = 0$ n'est pas indeterminé, c'est à dire si C_λ n'est pas stationnaire les solutions verifient $f'_x \varphi' + f'_y \psi' = 0$.

L'etude des cas où C_λ est stationnaire, ou M_λ est stationnaire sur Γ est analogue à l'etude faite dans le cas des droites. Par contre le cas où $f'_x = f'_y = 0$, c'est à dire quand M_λ est singulier sur C_λ est nouveau. En un tel point la condition $f'_x \varphi' + f'_y \psi' = 0$ est verifiée, mais en général il n'y a pas contact.

Si f est un polynome en λ la condition $f'_\lambda = 0$ exprime que λ est racine multiple de f. En particulier si f est du second degré en λ. on obtiendra l'équation cartesienne de l'enveloppe en annulant le discriminant.

102 Caractère projectif du contact

La droite joignant M_0 de matrice (M_0) à M de matrice $(M) = (M_0) + (\Delta M)$ contient le point P de matrice $\frac{1}{\Delta t}(M) - \frac{1}{\Delta t}(M_0) = \frac{1}{\Delta t}(\Delta M) = \left(\frac{\Delta M}{\Delta t}\right)$

Lorsque $\Delta t \to 0$ P tend vers M'_0 de matrice $(M'_0) = \left(\frac{dM}{dt}\right)$ dont les élements sont les derivées (dont nous supposerons l'existence) des éléments de (M).

Si (M_0) et (M'_0) ne sont pas proportionnelles les points M_0 et M'_0 sont distincts et la tangente est la droite $M_0 M'_0$.

Si (M_0) (M'_0) .... $(M_0^{(p-1)})$ sont proportionnelles, le point M_0 est representable par la matrice:

$$(M_0) + \Delta t\,(M'_0) + \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!}\left(M_0^{(p-1)}\right) = (\mathcal{M}_0)$$

La Droite $M_0 M$ contient le point Q de matrice

$$\frac{p!}{\Delta t^{p}}\left[(M) - (\mathcal{M}_0)\right] = \left(M_0^{(p)}\right) + \varepsilon$$

ε etant une matrice dont les element tendent vers 0 avec Δt. Si (M_0) et $(M_0^{(p)})$ ne sont pas proportionnelles Q tend vers $M_0^{(p)}$ de matrice $(M_0^{(p)})$.

le resultat est projectif car la transformation: $M^* = k\,M$ entraine $M^{*(r)} = k\,M^{(r)}$ et si (M_0) est proportionnelle à $(M_0^{(r)})$, (M^*_0) est proportionnelle à $(M_0^{*(r)})$.

Si (M_0) et (M'_0) ne sont pas proportionnelles les points M_0 et M_0 sont distincts et la tangente est la droite $M_0 M_0$.

Si (M_0) (M'_0) ... $(M_0^{(p-1)})$ sont proportionnelles, le point M_0 est représentable par la matrice

$$(M_0) + \Delta t \, (M'_0) + \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} \, (M_0^{(p-1)}) = (\mathcal{M}_0)$$

La Droite $M_0 M$ contient le point Ω de matrice

$$\frac{p!}{\Delta t^p}\left[(M) - (\mathcal{M}_0)\right] = (M_0^{(p)}) + \varepsilon$$

ε étant une matrice dont les éléments tendent vers 0 avec Δt. Si (M_0) et $(M_0^{(p)})$ ne sont pas proportionnelles Ω tend vers $M_0^{(p)}$ de matrice $(M_0^{(p)})$.

Le résultat est projectif car la transformation $M^* = \mathfrak{B} M$ entraîne $M^{*(n)} = \mathfrak{B} M^{(n)}$ et si (M_0) est proportionnelle à $(M_0^{(p)})$, (M^*_0) est proportionnelle à $(M_0^{*(p)})$.

geometrie differentielle euclidienne.

103 Derivée de $\vec{u}.\vec{v}$ et $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

En utilisant les representations analytiques de $\vec{u}.\vec{v}$ et $\vec{u}\wedge\vec{v}$ dans une base de l'espace vectoriel E_n ou E_3 on voit que si $u \to u_0$ quand $t \to t_0$, v tendant vers v_0 dans les mêmes conditions, $\vec{u}.\vec{v} \to \vec{u_0}.\vec{v_0}$ et $\vec{u}\wedge\vec{v} \to \vec{u_0}\wedge\vec{v_0}$. Des lors, quand $\Delta t \to 0$ et en supposant $u(t)$ et $v(t)$ derivables :

$$\frac{\Delta(\vec{u}.\vec{v})}{\Delta t} = \vec{u}\,\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} + \vec{v}\,\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{u}.\Delta\vec{v}}{\Delta t} \longrightarrow \vec{u}\vec{v}' + \vec{u}'\vec{v}.$$

$$\text{Soit } \boxed{\frac{d(\vec{u}.\vec{v})}{dt} = \vec{u}\,\vec{v}' + \vec{u}'\vec{v}}$$

$$\frac{\Delta(\vec{u}\wedge\vec{v})}{\Delta t} = \vec{u}\wedge\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}\wedge\vec{v} + \frac{\Delta\vec{u}\wedge\Delta\vec{v}}{\Delta t} \to \vec{u}\wedge\vec{v}' + \vec{u}'\wedge\vec{v}$$

$$\text{Soit } \boxed{\frac{d(\vec{u}\wedge\vec{v})}{dt} = \vec{u}\wedge\vec{v}' + \vec{u}'\wedge\vec{v}}$$

104 Longueur d'un arc:

On considere dans l'espace affine euclidien $\mathcal{E}_n$ un arc de courbe $\widehat{AB}$. A toute subdivision de $\widehat{AB}$ par des points M_i correspont une ligne polygonale $\mathcal{L}$ dont les sommets successifs sont les M_i. Soit $\ell(\mathcal{L})$ sa longueur et $\mathcal{L}$ l'ensemble des nombres $\ell(\mathcal{L})$ correspondant à toutes les subdivisions possibles. Si $\mathcal{L}$ admet une borne supérieure, $\widehat{AB}$ est dit <u>rectifiable</u>. Cette borne est par définition la longueur $\ell(\widehat{AB})$ de $\widehat{AB}$. Pour que $\widehat{AB}$ soit rectifiable, il faut et il suffit que $\mathcal{L}$ soit majoré.

Si $\widehat{AB}$ est rectifiable et si $\widehat{A'B'}$ en est un sous arc, à toute ligne polygonale P' inscrite dans $\widehat{A'B'}$ correspont par adjonction des segments AA' et BB' une ligne polygonale P inscrite dans AB. L'ensemble des $\mathcal{L}'$ des $\ell(P')$ est majorée par $\ell(\widehat{AB}) - AA' - BB'$.

A toute ligne polygonale P inscrite dans AB correspont par adjonction du point C une autre ligne inscrite P^*. P^* est la réunion d'une ligne P_1 inscrite dans $\widehat{AC}$ et d'une ligne P_2 inscrite dans CB et $\ell(P) \leq \ell(P^*) = \ell(P_1) + \ell(P_2)$. Mais d'après ce que nous avons vu précédemment AC et BC sont rectifiables et l'on à $\ell(P_1) + \ell(P_2) \leq \ell(\widehat{AC}) + \ell(\widehat{CB})$. Inversement d'ailleurs si $\widehat{AC}$ et $\widehat{CB}$ sont rectifiables $\ell(P)$ est majorée par $\ell(\widehat{AC}) + \ell(\widehat{CB})$ donc $\widehat{AB}$ est rectifiable. Si $\ell(\widehat{AB}) \neq \ell(\widehat{AC}) + \ell(\widehat{CB})$ on pourrait écrire $\ell(\widehat{AB}) = \ell(\widehat{AC}) + \ell(\widehat{CB}) - \alpha \quad \alpha > 0$. Comme $\ell(\widehat{AC})$ est la borne supérieure de l'ensemble $\mathcal{L}_1$ des $\ell(P_1)$ on pourrait trouver P_1 tel que $\ell(P_1) > \ell(\widehat{AC}) - \frac{\alpha}{2}$ et de même on pourrait trouver P_2 tel que $\ell(P_2) > \ell(\widehat{CB}) - \frac{\alpha}{2}$. En posant $P = P_1 \cup P_2$ on aurait $\ell(P) = \ell(P_1) + \ell(P_2) > \ell(\widehat{AC}) + \ell(\widehat{CB}) - \alpha$, d'où à fortiori $\ell(\widehat{AB}) > \ell(\widehat{AC}) + \ell(\widehat{CB}) - \alpha$ ce qui est contradictoire.

105 Une classe d'arc rectifiable:

Nous conviendrons que la fonction vectorielle $\vec{u}(t)$ est intégrable sur $[\alpha\,\beta]$, si ses composantes $x_i(t)$ le sont et nous poserons:

$$\int_\alpha^\beta \vec{u}(t)\,dt = \sum_{i=1}^n \vec{e}_i \int_\alpha^\beta x_i(t)\,dt$$

$\int_\alpha^\beta \vec{u}(t)\,dt$ est la limite quand $\sup(t_j - t_{j-1}) \to 0$ de $\vec{\omega} = \sum_{j=1}^m \vec{u}(\theta_j)(t_j - t_{j-1})$ où $\theta_j \in [t_j . t_{j-1}]$

cf: composantes.

Si $\vec{u}(t)$ est continue sur $[\alpha\,\beta]$, dans un repere orthonorme $|\vec{u}(t)| = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2(t)\right]^{1/2}$ l'est aussi.

quand $\sup(t_j - t_{j-1}) \to 0$, $\sum_{j=1} |\vec{u}(\theta_j)|(t_j - t_{j-1}) \to \int_\alpha^\beta |\vec{u}(t)|\,dt$

or $|\vec{\omega}| \leq \sum_{j=1}^n |\vec{u}(\theta_j)|(t_j - t_{j-1})$

d'où $\left|\int_\alpha^\beta \vec{u}(dt)\right| \leq \int_\alpha^\beta |\vec{u}|\,dt$.

Retenons: que le module de l'integrale est au plus egale à l'integrale du module.

Ceci posé, l'arc $\widehat{AB}$ est representé par $M(t)$ avec $t \in [\alpha\,\beta]$. Supposons l'existence et la continuité de $M'(t)$, on a: $\overrightarrow{M_{j-1}M_j} = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \vec{M'}\,dt$

donc $M_{j-1}M_j = \left|\overrightarrow{M_{j-1}M_j}\right| \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} |M'|\,dt$

et $\mathcal{C}(P) \leq \int_\alpha^\beta |M'|\,dt$.

L'ensemble $\mathcal{L}$ des $\mathcal{C}(P)$ est majoré par $\int_\alpha^\beta |M'|\,dt$ et $\widehat{AB}$ est donc rectifiable.

Dans ces conditions, soit M un point quelconque de $\widehat{AB}$: $\mathcal{C}(\widehat{AM}) = s$ existe. cf § 104.

Si $\widehat{AB}$ est orienté de A vers B, s s'appelle l'abscisse curviligne de M.

Appelons M_1 le point $M(t+\Delta t)$. Si $\Delta t > 0$, alors $MM_1 \leq \Delta s \leq \int_t^{t+\Delta t} |M'|\,dt$. Si $\Delta t < 0$, alors $MM_1 \leq \Delta s \leq \int_{t+\Delta t}^{t} |M'|\,dt$.

Dans les deux cas : $\dfrac{MM_1}{|\Delta t|} \leq \dfrac{\Delta s}{\Delta t} \leq \dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_t^{t+\Delta t} |M'|\,dt$

quand $\Delta t \to 0$ $\quad \left|\dfrac{MM_1}{\Delta t}\right| = \left|\dfrac{\Delta M}{\Delta t}\right| \to |\vec{M}'|$

de même $\dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_t^{t+\Delta t} |M'|\,dt \to |\vec{M}'|$

donc $\dfrac{ds}{dt}$ existe et $\dfrac{ds}{dt} = |\vec{M}'|$

d'où $\boxed{s = \displaystyle\int_d^t |\vec{M}'(u)|\,du}$

Enfin si M est un point ordinaire :

$$\frac{MM_1}{|\Delta s|} \to 1 \text{ quand } \Delta t \to 0$$

La corde et l'arc sont des infiniments petits equivalents

<u>NB</u> : On retiendra que: $ds^2 = |\vec{M}'^2|\,dt^2$

ou $\boxed{ds^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^n dx_i^2}$

106 <u>Courbure dans le plan</u>:

Soit une courbe C definie par $\vec{M}(t)$, fonction derivable autant de fois qu'on le voudra. Prenons comme nouveau parametre l'abscisse curviligne s de M. Si M est ordinaire $\dfrac{d\vec{M}}{ds} = \vec{\tau}$ a pour composantes $\dfrac{dx}{ds}$ et $\dfrac{dy}{ds}$. Comme $dx^2 + dy^2 = ds^2$, $\vec{\tau}$ est unitaire. En remarquant que $\vec{\tau}$ est la limite de $\dfrac{\Delta\vec{M}}{\Delta s}$ on voit que $\vec{\tau}$ est oriente selon la demi-tangente positive, demi tangente oriente par continuité, la courbe etant elle même orientee dans le sens des s croissants.

Si φ est l'angle polaire de $\vec{\tau}$, $\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$ et $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$

La courbure moyenne entre $M(s)$ et $M(s+\Delta s)$ est par définition $\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$. Sa limite quand Δs tend vers 0 est la courbure en M : $\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$

$R = \left|\frac{ds}{d\varphi}\right|$ est appelé le <u>rayon de courbure arithmétique</u> en M.

$\mathcal{R} = \frac{ds}{d\varphi}$ est le <u>rayon de courbure algébrique</u>. Il dépend de l'orientation choisie sur C.

Le vecteur $\frac{d\vec{\tau}}{d\varphi}$ a pour composante $-\sin\varphi$ et $\cos\varphi$. C'est le vecteur unitaire $\vec{n}$ de la normale positive, normale déduite de la tangente positive par rotation de $+\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = \dfrac{d\vec{\tau}}{d\varphi} \times \dfrac{d\varphi}{ds} = \dfrac{\vec{n}}{\mathcal{R}} \\[2ex] \dfrac{d\vec{n}}{ds} = \dfrac{d\vec{n}}{d\varphi} \times \dfrac{d\varphi}{ds} = -\dfrac{\vec{\tau}}{\mathcal{R}} \end{cases} \quad \text{(Formules de Frenet)}$$

Le point I définit par $\overrightarrow{MI} = \mathcal{R}\,\vec{n}$ est le <u>centre de courbure</u> de C en M. Il ne dépend pas de l'orientation choisie sur C, en effet le changement de sens positif remplace s, φ, $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\mathcal{R}$ par, $-s+C$, $\varphi+\pi$, $-\vec{\tau}$, $-\vec{n}$, $-\mathcal{R}$ et $\overrightarrow{MI} = -\vec{n}\cdot -\mathcal{R} = \vec{n}\,\mathcal{R}$ est invariant. Il résulte que la position du point I est une propriété intrinsèque de la courbe.

<u>Remarque</u>:

Si C est donné par $\vec{M}(t)$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y'}{x'}$, d'où en différenciant $d\varphi\left(1 + \frac{y'^2}{x'^2}\right) = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2}\,dt$

Si on oriente C dans le sens des t croissants

$$ds = (x'^2 + y'^2)^{1/2}\,dt$$

$$\mathcal{R} = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{(x'^2+y'^2)^{1/2}\ x'^2\left(1+\frac{y'^2}{x'^2}\right)}{x'y''-y'x''} = \frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y''-y'x''}$$

Les composantes de $\overrightarrow{MI}$ sont:

$$\overrightarrow{MI}\ \left|\ \begin{array}{l} -\dfrac{ds}{d\varphi}\cdot\dfrac{dy}{ds} = -\dfrac{dy}{d\varphi} \\[2ex] \dfrac{ds}{d\varphi}\cdot\dfrac{dx}{ds} = \dfrac{dx}{d\varphi} \end{array}\right.$$

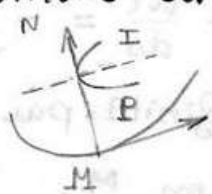
10) Developpée:

1 Methode: L'equation de la normale en M peut s'ecrire, P désignant le point courant $\overrightarrow{MP}\cdot\vec{\tau} = 0$

Le point caracteristique est donné par

$$-\frac{d\vec{M}}{ds}\,\vec{\tau} + \overrightarrow{MP}\,\frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0 \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{MP}\cdot\vec{n} = \mathcal{R}$$

Cette équation represente une droite perpandiculaire à la normale en I. Le point caracteristique de la normale est donc le centre de courbure. Son lieu, enveloppe de la normale est la développée de C.



2 Methode: L'equation de la normale en M peut s'ecrire $\overrightarrow{MP} = \rho\,\vec{n}$ d'où $d\vec{P} = d\vec{M} + \rho\, d\vec{n} + \vec{n}\, d\rho$

$$d\vec{P} = \vec{\tau}\left(1-\frac{\rho}{\mathcal{R}}\right)ds + \vec{n}\,d\rho$$

P est point caracteristique de MN si $d\vec{P}$ est colineaire à $\vec{n}$, c'est à dire si $\left(1-\frac{\rho}{\mathcal{R}}\right) = 0$ soit $\rho = \mathcal{R}$.

Orientons la developpée Γ de façon que $\vec{n}$ soit le vecteur unitaire de la tangente positive à Γ en I. et soit s_1 l'absisse curviligne de I sur Γ. On a $d\vec{I} = \vec{n}\,ds_1$. Comme par ailleurs $d\vec{I} = \vec{n}\,d\rho$, il vient

$$ds_1 = d\rho$$

Quand M decrit C, I decrit des arcs egaux sur Γ et sur MN. Γ et MN etant orientées dans des sens correspondants, on dit que MN <u>roule sans glisser</u> sur Γ

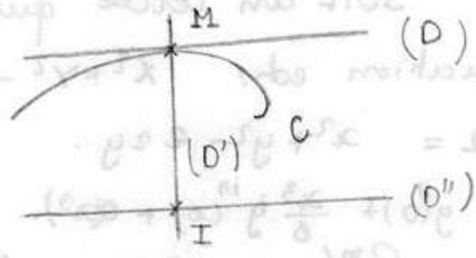
108 <u>Applications:</u>

(I) Si C est l'enveloppe d'une droite D. d'équation : $x\cos\varphi + y\sin\varphi - \rho(\varphi) = 0$,
le point caracteristique M est sur la droite D' d'equation: $-x\sin\varphi + y\cos\varphi - \rho'(\varphi) = 0$
Equation qui se met sous la forme

$$x\cos(\varphi + \tfrac{\pi}{2}) + y\sin(\varphi + \tfrac{\pi}{2}) - \rho'(\varphi) = 0$$

D' est donc la normale en M à C.

Le centre de courbure I, point caracteristique de D' est sur D'' d'equation: $x\cos\varphi + y\sin\varphi + \rho''(\varphi) = 0$
Si $\vec{u}$ est le vecteur unitaire d'angle polaire φ, on a donc $\overline{MI} = -(\rho + \rho'')\,\vec{u}$.

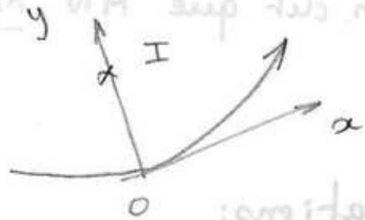


(II) <u>Courbure en O</u>: Soit C une courbe d'equation $y = f(x)$ tangente en O à Ox : d'où $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$
En orientant C dans le sens des x croissants, $\vec{Oy}$ est la normale positive et: d'apres la remarque du paragraphe 106, il vient : $\overline{OI} = R = \dfrac{1}{y''_0}$ si $y''_0 \neq 0$

Or d'après la formule de Mac Laurin :

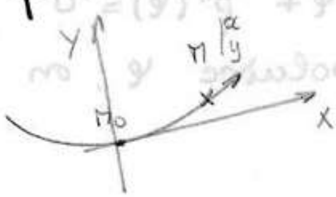
$$y = \frac{x^2}{2}\left(y''_0 + \varepsilon\right)$$

$\overline{OI} = R$ est la limite de $\frac{x^2}{2y}$ quand $x \to 0$



109 Cercle osculateur:

C'est la limite éventuelle du cercle Ω, tangent en M_0 à C et passant par M, quand M tend vers M_0 sur C. En prenant M_0 comme origine la tangente en M_0 comme axe Ox, Ω a une équation de la forme $X^2 + Y^2 - 2rY = 0$. Comme Ω passe par $M(x, y)$, $r = \frac{x^2+y^2}{2y} = \frac{x^2}{2y} + \frac{y}{2}$ quand $x \to 0$, $r \to R$.



Le cercle osculateur ω est donc centré en I.

Soit un cercle quelconque Ω tangent à C en M_0. Son équation est: $X^2+Y^2-2rY=0$

On a : $\mathcal{P}^{M}/_{\Omega} = x^2+y^2-2ry$.

Or $y = \frac{x^2}{2}y''(0) + \frac{x^3}{6}y'''(0) + o(x^3)$.

Par conséquent: $\mathcal{P}^{M}/_{\Omega} = x^2\left(1 - r y''(0)\right) - \frac{x^3}{3} r y'''(0) + o(x^3)$

- Si $r \neq \frac{1}{y'''(0)}$, $\mathcal{P}^{M}/_{\Omega}$ a un signe constant au voisinage de M_0. C ne traverse pas Ω en M_0
- Si $r = \frac{1}{y'''(0)}$, $\mathcal{P}^{M}/_{\Omega}$ change de signe en M_0. Le cercle osculateur est donc le seul cercle tangent à C en M_0 que la courbe puisse traverser en ce point.

Enfin, l'equation $S^M/_{\Omega} = 0$ c'est à dire $x^2+y^2-2ry=0$ donne les points communs à C et au cercle Ω. Cette équation s'écrit: $x^2(1-2y''(0)) - \frac{x^3}{3}\,2y'''(0) + O(x^3) = 0$.

En general C et Ω on 2 points confondus en M_0. Mais si le cercle est osculateur, il y en a au moins 3.

NB: On utilise cette remarque pour determiner ω quand C est unicursale, par voie algebrique.

110 Developpantes: Γ est une developpante de C si C est la developpée de Γ. Representons C par $\vec{M}(s)$. (Ce qui suppose C rectifiable). Un point P de la tangente est definie par $\vec{MP} = \rho\vec{\tau}$. Le lieu de P est une developpante de C si $\vec{\tau}\cdot d\vec{P} = 0$.

Or $d\vec{P} = d\vec{M} + d\rho\,\vec{\tau} + \rho\, d\vec{\tau} = \vec{\tau}\,ds + d\rho\,\vec{\tau} + \frac{\vec{n}}{\mathcal{R}}\rho\, ds$

$$d\vec{P} = \vec{\tau}(ds + d\rho) + \frac{\rho}{\mathcal{R}}\vec{n}\,ds$$

Pour avoir l'orthogonalite, il vient: $ds + d\rho = 0$

soit $\rho + s = \text{cte}$.

Comme Γ depent de la constante, il y a une infinité de developpante de C. Se sont des courbes paralleles.

Si C est donnée par $\vec{M}(t)$ on ecrit: $\vec{MP} = \rho\vec{v} = \rho\vec{M}'_t$

ρ est solution de l'equation differentielle lineaire:

$$d\vec{P} = d\vec{M} + d\rho\,\vec{v} + \rho\, d\vec{v}$$

d'où: $$\vec{v}\,d\vec{M} + \vec{v}^2\, d\rho + \rho\,\vec{v}\,d\vec{v} = 0$$

$$v^2(d\rho + dt) + \rho\,\vec{v}\,d\vec{v} = 0$$

111 Enveloppe du cercle en geometrie plane:

Etant donné une famille de cercle (C_λ) d'equation

cartésienne $x^2+y^2-2\alpha(\lambda)x-2\beta(\lambda)y+\gamma(\lambda)=0$,
les points caractéristiques satisfont à l'équation
$$-2\alpha' x-2\beta' y+\gamma'=0$$
qui représente une droite (Δ_λ) perpendiculaire à la tangente au lieu du centre. Ils sont donc symétriques par rapport à cette tangente. En outre l'axe radical des cercles $(C_{\lambda+\Delta\lambda})$ et (C_λ) a pour équation:
$$-\frac{2\Delta\alpha}{\Delta\lambda}x-2\frac{\Delta\beta}{\Delta\lambda}y+\frac{\Delta\gamma}{\Delta\lambda}=0$$
Quand $\Delta\lambda\to 0$ la limite du premier membre est
$$-2\alpha' x-2\beta' y+\gamma'.$$
(Δ_λ) apparaît ainsi comme limite de l'axe radical quand $\Delta_\lambda\to 0$.

En particulier: Si les cercles (C_λ) appartiennent à un réseau linéaire, l'axe radical de (C_λ) et $(C_{\lambda+\Delta\lambda})$ passe par le centre O du réseau. (Δ_λ) passe donc par O.

Les points caractéristiques M_λ et N_λ vérifiant $\overline{OM_\lambda}\times\overline{ON_\lambda}=\mathcal{P}^{0}/_{(C_\lambda)}=\mathcal{P}$ sont inverses dans l'inversion $J(O.\mathcal{P})$.

Cas des cercles osculateurs:

Si les cercles C_λ sont les cercles osculateurs d'une courbe donnée Γ, M, point de contact du cercle avec Γ est un point caractéristique. Comme il est sur la normale en M à Γ, c'est à dire sur la tangente au lieu du centre, c'est le seul point caractéristique. L'enveloppe se réduit donc à Γ

112 Coordonnées Polaires:

Etant donné un point M du plan Euclidien, choisissons un axe $\vec{OX}$ de vecteur unitaire $\vec{u}$ sur OM. Posons $OM = \rho$ et $(\vec{Ox}\ \vec{OX}) = \theta\ [2\pi]$. Si OX est remplacé par l'axe opposé, ρ est remplacé par $-\rho$ et θ par $\theta + \pi\ (2\pi)$.

Soit une courbe C représentée par $\rho = f(\theta)$. Si ρ s'annule pour $\theta = \theta_0$, C passe par O. Lorsque θ tend vers θ_0, OM a pour limite OT d'angle polaire $\theta_0\ [\pi]$.
OT est donc la tangente en O.

Soit un point M autre que O, l'axe $\vec{OX}$ et l'axe $\vec{OY}$ qui lui est directement perpendiculaire. $\vec{u_1}$ est le vecteur unitaire de $\vec{OY}$. Si M est ordinaire la tangente MT est dirigée par $\vec{M'_\theta} = (\rho\vec{u})' = \rho'\vec{u} + \rho\vec{u_1}$

<u>Remarque</u>: Plus généralement lorsque ρ et θ sont données en fonction d'un paramètre t:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{M}}{dt} = \rho'_t\,\vec{u} + \rho\,\theta'_t\,\vec{u_1}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = \rho''_{t^2}\,\vec{u} + 2\rho'_t\theta'_t\,\vec{u_1} + \rho\,\theta''_{t^2}\,\vec{u_1} - \rho\,\theta'^2_t\,\vec{u}$$

$$= \boxed{(\rho'' - \rho\theta'^2)\,\vec{u} + (2\rho'\theta' + \rho\theta'')\,\vec{u_1}}$$

113 Arcs et courbure en coordonnées polaires:

Puisque $\vec{M'_\theta} = \rho'_\theta\,\vec{u} + \rho\,\vec{u_1}$, $|M'_\theta| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$

et par conséquent $s = \int \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta$.

On retiendra : $\boxed{ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}$

Posons $(\vec{Ox}\ \vec{t}) = \psi\ [2\pi]$. On a $\varphi = \theta + \psi$

d'où $d\varphi = d\theta + d\psi$

Or $\boxed{tg\,\psi = \frac{\rho}{\rho'}}$ donc $\left(1 + \frac{\rho^2}{\rho'^2}\right) d\psi = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2}\, d\theta$

d'où $\dfrac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta = d\varphi$

Si C est orienté dans le sens des θ croissants :

$$\mathcal{R} = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}$$

On en déduit que la concavité est tournée vers O si $\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''$ est positif, qu'il y a inflexion si cette quantité est nulle et change de signe.

114 Courbes gauches :

On appelle normale principale à une courbe gauche C en M, celle qui se trouve dans le plan osculateur $\mathcal{P}$. On l'oriente vers la concavité : soit $\vec{n}$ son vecteur unitaire. On pose $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$: le support de $\vec{b}$ est la binormale. $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ et $\vec{b}$ constituent le trièdre de Frenet en M.

O étant un point fixe, construisons $\vec{O\mu}$ équipolent à $\vec{\tau}$. Lorsque M varie μ décrit une courbe sphérique γ appelée l'indicatrice des tangentes ou hodographe du mouvement lorsque $t = s$. On oriente γ de façon que M et μ décrivent simultanément des axes positifs et soit (σ) l'abscisse curviligne de μ sur γ.

Le vecteur $\dfrac{d^2\vec{M}}{ds^2} = \dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$ est situé dans le plan $\mathcal{P}$ et est orthogonal à $\vec{\tau}$. En effet $\vec{\tau}^2 = 1 \Rightarrow \vec{\tau}\,\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = 0$.

Si $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = 0$ son appartenance à $\mathcal{P}$ est triviale.

Si $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} \neq 0$ il est orthogonal à $\vec{\tau}$, donc non colinéaire à $\vec{\tau}$ et c'est alors lui qui définit avec $\vec{\tau}$ le plan osculateur $\mathcal{P}$.

Par suite $\dfrac{d\vec{u}}{d\sigma} = \dfrac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \dfrac{ds}{d\sigma}$ est colinéaire à $\vec{n} = \dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$.

Comme $\dfrac{ds}{d\sigma} > 0$ et que $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$ est dirigé vers la concavité : (cf § 96), le vecteur $\dfrac{d\vec{u}}{d\sigma}$ est unitaire et dirigé dans le sens de $\vec{n}$.

Donc $\dfrac{d\vec{u}}{d\sigma} = \vec{n}$. En posant $\dfrac{ds}{d\sigma} = R$ il vient :

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$$

R : est le rayon de courbure arithmétique en M.

Le centre de courbure est défini par : $\vec{MI} = R\,\vec{n}$.

De $\vec{b}^2 = 1$ et $\vec{\tau}\,\vec{b} = 0$ on tire $\vec{b} \cdot \dfrac{d\vec{b}}{ds} = 0$

$$\vec{\tau}\,\frac{d\vec{b}}{ds} + b\,\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \underbrace{\vec{\tau}\,\frac{db}{ds}}_{0} + \underbrace{\frac{\vec{b}\,\vec{n}}{R}}_{0}$$

Le vecteur $\dfrac{d\vec{b}}{ds}$ orthogonal à $\vec{\tau}$ et à $\vec{b}$ est donc colinéaire à $\vec{n}$ et on pose : $\dfrac{d\vec{b}}{ds} = -\dfrac{\vec{n}}{T}$

T : rayon de torsion en M.

NB : A la différence de R c'est un réel de signe quelconque.

Enfin $$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d(\vec{b}\wedge\vec{\tau})}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds}\wedge\vec{\tau} + \vec{b}\wedge\frac{d\vec{\tau}}{ds}$$
$$= -\frac{\vec{n}\wedge\vec{\tau}}{T} + \frac{\vec{b}\wedge\vec{n}}{R}$$
$$= -\frac{\vec{\tau}}{R} + \frac{\vec{b}}{T}$$

115 Remarques :

① Si C est donnée par $\vec{M}(t)$:

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\vec{\tau}}_{\vec{\gamma}_t} + \underbrace{\frac{v^2}{R}\vec{n}}_{\vec{\gamma}_n}$$

$\vec{\gamma}_t = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$ est l'accélération <u>tangentielle</u>

$\gamma_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}$ est <u>l'accélération normale</u>

(11) Pour une courbe plane, $\mathcal{R} = R$ si la normale principale coïncide avec la normale positive, $\mathcal{R} = -R$ dans l'autre cas.

Cinématique Euclidienne.

116 Solide : Distribution des vitesses à l'instant t

Un ensemble de points, mobile par rapport à un repère donné est dit solide si les distances mutuelles de ces points est invariables. M et N étant deux points quelconque du solide S, la relation $\overrightarrow{MN}^2 = \text{cte}$ entraîne : $\overrightarrow{MN}\,\overrightarrow{M}'_t = \overrightarrow{MN}\,\overrightarrow{N}'_t$ et réciproquement. Par suite, pour qu'un ensemble de points mobiles soit solide il faut et il suffit qu'à tout instant, le champ des vitesses $\vec{V}_M$ soit équiprojectif.

Considérons le solide S à l'instant t. $\vec{V}_M$ est et moment en M d'un torseur T. Si $\vec{\omega}$ est la somme de ce torseur et si O est un point particulier de S, on peut écrire : $\boxed{\vec{V}_M = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$

117 Mouvements particuliers :

① Translation : S est animé d'un mouvement de translation si l'on passe d'une position arbitraire de S à une autre par une translation géométrique.

O et M étant deux points de S, $\overrightarrow{OM}$ reste équipollent à un vecteur fixe. La trajectoire de M se

Se déduit de celle de O par une translation géométrique.
et $\vec{V}_M = \vec{V}_0$

⑪ <u>Rotation</u> : S est animé d'un mouvement de <u>rotation</u> si l'on passe d'une position arbitraire de S à une autre par une rotation géométrique d'axe <u>fixe</u> $\vec{\Delta}$
Soit O et A deux points de S situés sur Δ. Ils sont fixes et $\vec{V}_0 = \vec{V}_A = 0$. De la relation $\vec{V}_A = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{OA}$ on tire $\vec{\omega} \wedge \vec{OA} = \vec{0}$ d'où la colinéarité de $\vec{\omega}$ et $\vec{OA}$.
Choisissons un repère fixe (O xyz) dont l'axe $\vec{Oz}$ coïncide avec $\vec{\Delta}$ et soit (O xyz) un repère mobile lié à S, $\vec{Oz}$ coïncidant également avec $\vec{\Delta}$. et posons $(\vec{OX} . \vec{Ox}) = \theta$. Avec les notations du § 112

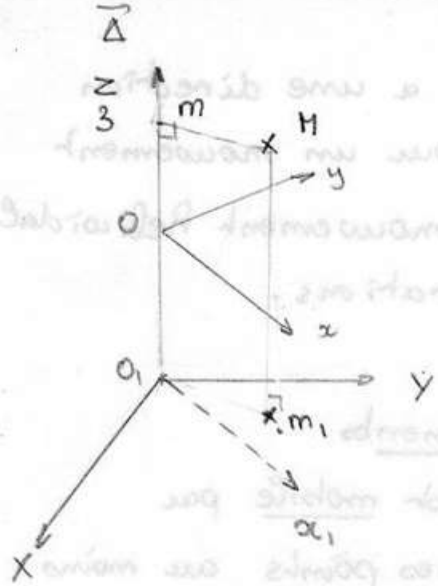
$$\vec{V}_M = \rho \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_1$$

Or en désignant par ω la mesure algébrique de $\vec{\omega}$ sur Δ : $\vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge (\rho \vec{u}) = \omega \rho \vec{u}_1$

d'où $$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$$

118 <u>Mouvement hélicoïdal</u> :

S est animé d'un mouvement hélicoïdal si l'on passe d'une position arbitraire de S à une autre par un déplacement hélicoïdal d'axe <u>fixe</u> $\vec{\Delta}$ et de pas <u>constant</u>
Choisissons un repère fixe $(O_1\ XYZ)$ dont l'axe $\vec{O_1 Z}$ coïncide avec $\vec{\Delta}$ et un repère lié à S (O xyz). $\vec{Oz}$ coïncidant également avec $\vec{\Delta}$. Soit $O_1 x_1$ la projection de $\vec{Ox}$ sur XO_1Y, et posons $(\vec{O_1 X} . \vec{O_1 x_1}) = \theta$



Projetons M en m_1 sur XO_1Y et en m sur O_1Z. m_1 est animé d'un mouvement de rotation d'axe $\vec{\Delta}$ et $\vec{V}_{m_1} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_1 m_1}$ avec $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

et comme $\overrightarrow{O_1 M} = \overrightarrow{O_1 O} + \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{O_1 m_1}$

$\vec{V}_M = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_1 m_1}$

$$\boxed{\vec{V}_M = h\vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$$

h étant le pas reduit.

119 <u>Application</u>:

Revenons au mouvement general d'un solide S. Soit à l'instant t, $\vec{\Delta}$ l'axe central du torseur T et O un point de S situé sur $\vec{\Delta}$. $\vec{V}_0$ étant porté par $\vec{\Delta}$ on peut mettre $\vec{V}_0$ sous la forme $h\vec{\omega}$. Les vitesses $\vec{V}_M$ sont donc les mêmes que dans un mouvement helicoidal dont les caracteristiques varient avec T, le mouvement <u>helicoidal tangent</u>. C'est pourquoi Δ s'appelle l'axe instantané de <u>rotation et glissement</u>. $\vec{\omega}$ s'appelle la <u>rotation instantanée</u> de S

120 <u>Distribution des accélérations</u>:

De la relation $\vec{V}_M = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ on deduit:

$\vec{\gamma}_M = \vec{\gamma}_0 + \vec{\omega}' \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{V}_M - \vec{V}_0)$. Or $\vec{\omega} \wedge (\vec{V}_M - \vec{V}_0) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$

d'où $\vec{\gamma}_M = \vec{\gamma}_0 + \vec{\omega}' \wedge \overrightarrow{OM} - \vec{\omega}^2 . \overrightarrow{mM}$, m étant la projection de M sur la parallele à l'axe instantanée issue de O.

Pour un mouvement helicoïdal $\vec{\omega}$ a une direction fixe. $\vec{\omega}'$ lui est donc colinéaire. Pour un mouvement quelconque il n'en est plus ainsi : le mouvement helicoïdal tangent ne fournit donc pas les accelerations.

121 Composition des mouvements

Nous dirons qu'un solide S' est mobile par rapport à un autre S, si l'un de ses points au moins est mobile par rapport à un repère lié à S. Le mouvement de S' par rapport à S sera notté $\left(\frac{S'}{S}\right)$. Soit alors $S_0\ S_1\ S_2$ trois solides. En considerant S_0 comme fixe $\left(\frac{S_2}{S_0}\right)$ sera le mouvement absolu. $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$ le mouvement relatif, $\left(\frac{S_1}{S_0}\right)$ le mouvement d'entraînement. Soit M un point de S_2. Sa vitesse dans $\left(\frac{S_2}{S_0}\right)$ est appelle vitesse absolue : $\vec{V}_a(M)$ et sa vitesse dans $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$ est la vitesse relative $\vec{V}_r(M)$. Si μ est le point de S_1 avec lequel M coïncide à l'instant t, on appelle vitesse d'entrainement de M : $\vec{V}_e(M)$ la vitesse absolue de μ

NB : Definitions analogues pour les accelerations.

122 Composition des vitesses et des accelerations :

Soit M un point de S_2 et $x\,y\,z$ ses coordonnees dans un repere $(O\,xyz)$ lié à S_1. Ce sont des fonctions de t. La relation $\vec{M} = \vec{O} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ entraine en derivant par rapport à t :

$$\vec{V}_a = \underbrace{\vec{V}_O + x\vec{i}' + y\vec{j}' + z\vec{k}'}_{\vec{V}_e} + \underbrace{x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}}_{\vec{V}_r}.$$

Soit $\boxed{\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r}}$.

(La premiere accolade étant ce à quoi se reduit V_a lorsque $x\,y\,z$ sont constants)

Une seconde dérivation donne:

$$\vec{\gamma_a} = \underbrace{\vec{\Gamma_0} + x\vec{i}'' + y\vec{j}'' + z\vec{k}''}_{\vec{\gamma_e}} + \underbrace{x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}}_{\vec{\gamma_r}} + 2(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')$$

Pour interpreter $x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$ introduisons le point P de S_1 défini par $\vec{OP} = \vec{i}$. Sa vitesse absolue est: $\vec{V_0} + \vec{i}'$. Par ailleurs, si $\vec{\omega}$ est la rotation instantanée de S_1 elle est encore $\vec{V_0} + \vec{\omega} \wedge \vec{i}$ d'où $\vec{i}' = \vec{\omega} \wedge \vec{i}$

De même $\vec{j}' = \vec{\omega} \wedge \vec{j}$ et $\vec{k}' = \vec{\omega} \wedge \vec{k}$. Par suite,

$$x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' = \vec{\omega} \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) = \vec{\omega} \wedge \vec{V_r}$$

Soit $\boxed{\vec{\gamma_a} = \vec{\gamma_e} + \vec{\gamma_r} + \vec{\gamma_c}}$

avec $\vec{\gamma_c} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V_r}$ qui est l'accélération complementaire ou accélération de Coriolis

123 Mouvement d'une figure plane:

Supposons qu'un plan Π du solide S glisse sur un plan fixe Π_0. Π_0 sera pris pour plan XO_1Y du repere fixe et Π pour plan xoy du repere entrainée. Les vitesses des points de Π étant situées dans Π, $\vec{\omega}$ est perpendiculaire à Π. Soient $(\xi\ \eta)$ les composantes de $\vec{V_0}$ sur xoy. D'apres la relation $\vec{V_M} = \vec{V_0} + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$ les composantes de $\vec{V_M}$ sur xoy sont $(\xi - \omega y,\ \eta + \omega x)$

On supposera $\omega \neq 0$.

On appelle centre instantané de rotation : CIR la trace I de l'axe instantanée sur Π. Ses coordonnées sont $\left(x_1 = -\frac{\eta}{\omega}, y_1 = \frac{\xi}{\omega}\right)$. En effet $\vec{V_I}$ est à la fois colinéaire à $\vec{\omega}$ et situé dans Π donc $\vec{V_I} = 0$.

Si la loi du mouvement est changé, $t = \varphi(u)$. ξ, η, ω deviennent : $\xi\varphi', \eta\varphi', \omega\varphi'$. Donc I est invariant. C'est donc un element purement géometrique du mouvement.

Soit une courbe (c) de Π et l'enveloppe $(\mathcal{C})$ de ses positions successives, M un point caractéristique de $(\mathcal{C})$. Le mouvement de M sur $(\mathcal{C})$ résulte de son mouvement sur (c). (mouvement relatif) et du mouvement $\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right)$. (mouvement d'entrainement). Comme $\vec{V_a}(M)$ et $\vec{V_r}(M)$ sont portés par la tangente commune MT à (c) et $(\mathcal{C})$, il en est de même pour $\vec{V_e}(M)$.

Lorsque t varie, I se deplace à la fois dans Π et Π_0. Mais à chaque instant, la vitesse absolue du point coincidant est $\vec{0}$. Autrement dit $\vec{V_e}(I) = \vec{0}$. La formule de distribution des vitesses appliquée au point de Π coincidant avec M à l'instant t donne.

$\vec{V_e}(M) = \vec{V_e}(I) + \vec{\omega} \wedge \vec{IM}$. C'est à dire $\vec{V_e}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{IM}$.

Il en resulte que $\vec{IM}$ est perpandiculaire à MT.

Inversement, si M est le pied d'une normale à (c) issue de I, $\vec{V_r}(M)$ et $\vec{V_e}(M)$ sont portés par MT. Il en est donc de même de $\vec{V_a}(M)$ et M est un point caractéristique de (c).

124 <u>Base et roulante:</u>

I variant avec t soit γ son lieu dans Π et Γ son lieu dans Π_0. Comme $\vec{V}_e(I) = 0$ $\vec{V}_a(I) = \vec{V}_r(I)$. γ et Γ sont tangentes en I. Si on les oriente dans le meme sens, c'est à dire de façon que les demi tangente en I coincide et si s et S sont les absisses curvilignes de I sur γ et Γ, $\vec{V}_r(I) = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}$ $\vec{V}_a(I) = \frac{dS}{dt}\vec{\tau}$ par suite $ds = dS$ et γ roule sans glisser sur Γ
γ est la <u>roulante</u> du mouvement et Γ la <u>base</u>

Inversement si une courbe γ du plan Π roule sans glisser sur une courbe Γ du plan Π_0 et si I designe le point de roulement $\frac{ds}{dt} = \frac{dS}{dt}$ d'où $\vec{V}_r(I) = \vec{V}_a(I)$, $\vec{V}_e(I) = 0$ et I est le CIR du mouvement.

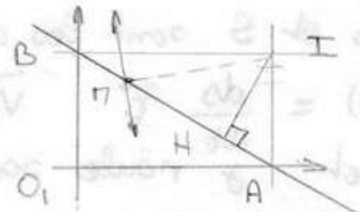
<u>Remarque</u>: Les mouvements $\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right)$ et $\left(\frac{\Pi_0}{\Pi}\right)$ sont dits <u>inverse</u>. En les composant on obtient $\left(\frac{\Pi_0}{\Pi_0}\right)$ dans lequel la vitesse de tout point est nulle. les vitesses de I dans $\frac{\Pi}{\Pi_0}$ et $\frac{\Pi_0}{\Pi}$ sont donc opposees et par suite toute deux nulles. I est donc aussi le CIR de $\frac{\Pi_0}{\Pi}$. Ce resultat decoule d'ailleurs de ce que Γ roule alors sur γ.

125 <u>Applications geometriques:</u>

1) Tout d'abbord et de façon evidente la propriete permet la construction de la tangente en tout point d'une courbe cycloidale.

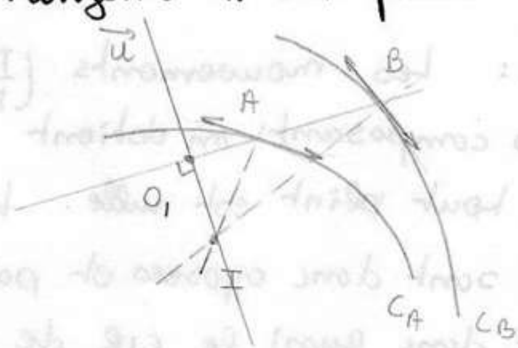
2) Si deux points A et B de Π se déplace sur deux droites perpendiculaire O_1X et O_1Y de Π_0. I est le quatrieme sommet du rectangle AO_1BI.

le point de contact de AB avec son enveloppe, qui est une <u>astroïde</u> ou hypocycloïde à 4 rebroussements, est la projection H de I sur AB. Tout point M de Π situé sur AB décrit une ellipse de Π_0 et la tangente en M à l'ellipse est la normale à IM



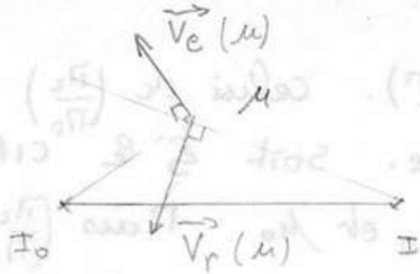
3/ Si une droite AB de Π passe par un point fixe O_1 de Π_0 la trajectoire C_B de B est une conchoïde de la trajectoire C_A de A. Le centre instantané I est sur la perpendiculaire $O_1 u$ à AB. Les normale en A et B à C_A et C_B se coupent donc sur $O_1 u$.

<u>Application:</u> tangente en un point d'un <u>limaçon de Pascal</u>.



126 <u>Théorème de Koenigs</u>

Soit Π et Π' deux plans glissants sur Π_0, I_0 I' et I'_0 les CIR de $\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right)\left(\frac{\Pi'}{\Pi}\right)$ et $\left(\frac{\Pi'}{\Pi_0}\right)$. Considérons le point $\mu \in \Pi'$ situé à l'instant t en I'_0. Point <u>coïncidant</u> de I'_0. $\left(\frac{\Pi'}{\Pi_0}\right)$ résulte de $\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right)$ et $\left(\frac{\Pi'}{\Pi}\right)$. Soit $\vec{V_e}(\mu)$ la vitesse de μ dans $\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right)$ et $\vec{V_r}$ la vitesse de μ dans $\left(\frac{\Pi'}{\Pi}\right)$. $\vec{V_e}(\mu)$ est perpendiculaire à $I_0 \mu$ $\vec{V_r}(\mu)$ est perpendiculaire à $I'\mu$. Comme:



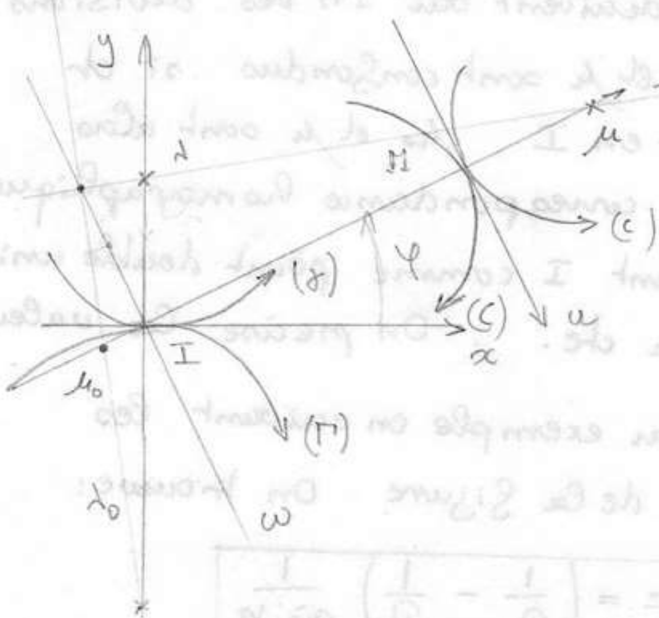
$$\vec{V}_e(\mu) + \vec{V}_r(\mu) = \vec{V}_a(\mu) = 0$$

$\vec{V}_e(\mu)$ et $\vec{V}_r(\mu)$ sont colinéaires

I_0 I' et I'_0 sont donc alignés.

NB : Le raisonnement est en défaut si $\vec{V}_e(\mu) = \vec{V}_r(\mu) = 0$. Dans ce cas les trois CIR sont confondus. La propriété est encore vraie.

127 Construction de Savary :



Reprenons le mouvement $\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right)$. Soit (Γ) la base et (γ) la roulante. Ix et Iy sont la tangente et la normale communes à (Γ) et (γ). Considérons une courbe (c) de Π et son enveloppe (C) dans Π_0. Si M est un point caractéristique, Mu et Mv sont la tangente et la normale communes à (c) et (C) en M. Désignons par λ_0 λ μ_0 μ les centres de courbures de Γ et γ en I, de (C) et (c) en M et par $I\omega$ la perpendiculaire en I à Iv. Soit Π_1 un plan mobile attaché au repère xoy, Π_2 un plan attaché au repère uMv. $\left(\frac{\Pi_2}{\Pi_1}\right)$ résulte de $\left(\frac{\Pi_0}{\Pi_1}\right)$ et $\left(\frac{\Pi_2}{\Pi_0}\right)$. Le CIR de $\left(\frac{\Pi_0}{\Pi_1}\right)$ est λ_0 car il est le point de roulement de I_y sur la developpée de (Γ). celui de $\left(\frac{\Pi_2}{\Pi_0}\right)$ est μ_0, pour la raison analogue. Soit ξ le CIR de $\left(\frac{\Pi_2}{\Pi_1}\right)$, il est aligné avec λ_0 et μ_0. Mais $\left(\frac{\Pi_2}{\Pi_1}\right)$ resulte encore de $\left(\frac{\Pi}{\Pi_1}\right)$ et $\left(\frac{\Pi_2}{\Pi_1}\right)$, ce qui prouve l'alignement de λ μ et ξ. Enfin dans $\left(\frac{\Pi_1}{\Pi_2}\right)$, I decrit Mr. ξ se trouve donc sur $I\omega$. D'où la construction de μ_0.

La construction montre que si I λ λ_0 et M sont fixes μ_0 et μ decrivent sur IM des divisions homographiques. μ_0 et μ sont confondus si et seulement si ξ est en I. μ_0 et μ sont alors egalement en I La correspondance homographique entre μ_0 et μ admettant I comme point double unique est: $\frac{1}{\overline{I\mu_0}} - \frac{1}{\overline{I\mu}} = \text{cte}$. On precise la valeur de cette constante, par exemple en ecrivant les equations des droites de la figure. On trouve:

$$\boxed{\frac{1}{\overline{I\mu_0}} - \frac{1}{\overline{I\mu}} = \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{1}{\mathcal{R}}\right) \frac{1}{\sin\varphi}}$$

$\mathcal{R}_0$ etant le rayon de courbure algebrique de (Γ) en I, $\mathcal{R}$ celui de (γ) en I. C'est la formule d'Euler-Savary.

128 Acceleration dans $\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right)$

De $\vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IM}$ on tire : $\vec{\gamma}_M = \vec{\omega}' \wedge \overrightarrow{IM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{V}_M - \vec{V}_I$

D'où $\vec{\gamma}_M = \vec{\omega}' \wedge \overrightarrow{IM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IM}) - \vec{\omega} \wedge \vec{V}_I$

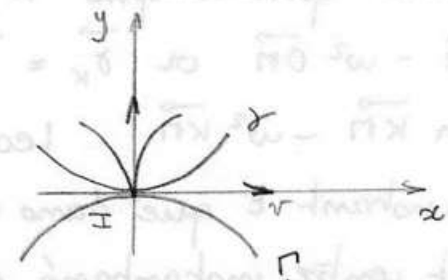
$$\vec{\gamma}_M = \vec{\omega}' \wedge \overrightarrow{IM} - \omega^2 \overrightarrow{IM} - \vec{\omega} \wedge \vec{V}_I$$

Reprenons le repere xoy mobile à la fois dans Π

et Π_0. Soit v et 0 les composantes de $\vec{V_1}$ (vitesse absolue) sur xIy. Celles de $\vec{\gamma_n}$ sont :

$\gamma x = -(\omega' y + \omega^2 x)$ et $\gamma_y = \omega' x - \omega^2 y - \omega v$.

x et y étant les coordonnées à l'instant t du point M dans xIy, donc variables avec le temps. En particulier pour le point O de Π qui coïncide avec I à l'instant t : $\gamma_x = 0$ et $\gamma_y = -\omega v$. La trajectoire de O admet donc un retroussement de tangente Iy en I.



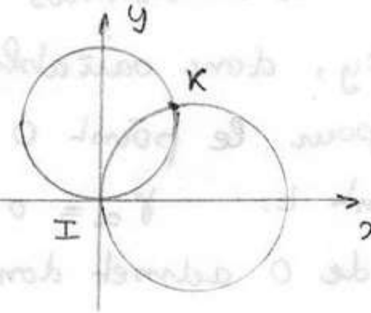
Application : Points de retroussement des epi- et hypo-cycloïdes cuspidales.

Le lieu des points de Π qui passent, à l'instant t, par une inflexion de leur trajectoire est défini par $v_x \gamma_y - v_y \gamma_x = 0$ ou $-\omega y(\omega' x - \omega^2 y - v\omega) - \omega x(-\omega' y - \omega^2 x) = 0$

Soit $x^2 + y^2 + \frac{v}{\omega} y = 0$. C'est un cercle tangent en I à Ix. Ce cercle ne dépend pas de la loi du mouvement, mais seulement de son déroulement spacial. C'est le cercle des inflexions.

Le lieu des points dont l'accélération tangentielle est nulle à l'instant t est défini par $v_x \gamma_x + v_y \gamma_y$ ou $x^2 + y^2 - \frac{v\omega}{\omega'} x = 0$. C'est un cercle tangent en I à Iy et qui dépend de la loi du mouvement. (C'est un élément cinématique du mouvement)

Les deux cercles se coupent en I et en K tel que $\vec{\gamma}_K = \vec{0}$. K est le point d'accélération nul. Lorsque la loi du mouvement varie K décrit le cercle des inflexions. (pour l'instant t).



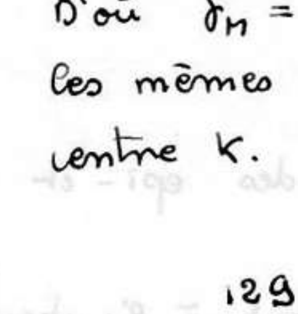
Pour un point quelconque M de Π :

$$\vec{\gamma}_M = \vec{\gamma}_O + \vec{\omega}' \wedge \vec{OM} - \omega^2 \vec{OM} \quad \text{or} \quad \vec{\gamma}_K = \vec{\gamma}_O + \vec{\omega}' \wedge \vec{OK} - \omega^2 \vec{OK} = \vec{0}$$

D'où $\vec{\gamma}_M = \vec{\omega}' \wedge \vec{KM} - \omega^2 \vec{KM}$. Les accélérations sont les mêmes à l'instant t que dans une rotation de centre K. K est centre instantané des accélérations.

129 Mouvement du trièdre de Frenet :

Soit une courbe gauche C et $\vec{\omega} = p\vec{\tau} + q\vec{n} + r\vec{b}$ la rotation instantanée du trièdre de Frenet dans le mouvement régit par la loi $t = s$. La vitesse du point P défini par $\vec{MP} = \vec{\tau}$ est $\vec{V}_P = \vec{V}_M + \vec{\omega} \wedge \vec{\tau}$



Mais par ailleurs $\vec{V}_P = \vec{V}_M + \dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$

Soit $\vec{V}_P = \vec{V}_M + \dfrac{\vec{n}}{R}$.

Donc $\dfrac{\vec{n}}{R} = (p\vec{\tau} + q\vec{n} + r\vec{b}) \wedge \vec{\tau}$
$= -q\vec{b} + r\vec{n}$

Par suite $q = 0$ et $r = \dfrac{1}{R}$

De même $\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{b} = -p\vec{n}$

et $p = \dfrac{1}{T}$

Enfin $\dfrac{d\vec{n}}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{n} = -r\vec{\tau} + p\vec{b} = -\dfrac{\vec{\tau}}{R} + \dfrac{\vec{b}}{T}$

XIV Integrales Multiples

130 Domaines quarrables:

Soit C une courbe continue, fermée, sans point double limitant un domaine Δ du plan euclidien. Considerons l'ensemble e des aires polygonales convexex ou cancaves contenu dans Δ et l'ensemble E de celles contenant Δ. Δ est dit quarrable si les deux ensembles e E sont adjascents. Leur borne commune sera par definition l'aire a de Δ

140 Integrales doubles:

Soit f une fonction réelle definie sur le domaine quarrable Δ et bornee sur Δ. A chaque subdivision d de Δ en n domaine quarrable S_i d'aire respective w_i on associe les sommes de Darboux

$$s(d) = \sum_1^n m_i w_i \quad \text{et} \quad S(d) = \sum_1^n M_i w_i$$

où m_i et M_i designent les bornes de f sur S_i.

d et d' etant deux subdivisions de Δ, on a alors $s(d) \leq S(d')$: (cf: § 57), l'ensemble $e(s)$ est majoree, l'ensemble $E(s)$ est minorée. e et E sont donc bornés. Si ces bornes sont egales f

est dite integrable sur Δ. Nous ecrirons: $I = \iint_\Delta f\,d\omega$.
I designant la borne commune.

Le critère d'integrabilité s'ennonce ici:

$$\forall \varepsilon \in R^+ \;\; \exists d \quad S(d) - s(d) < \varepsilon.$$

Supposons desormais f continue sur Δ. Appelons <u>diametre</u> d'un domaine borné δ la borne superieure de la distance de deux points de δ et considerons une subdivision de en domaines quarrables δ_i de diamètre inferieur à η. f etant continue, m_i et M_i sont atteintes en deux points P'_i et P''_i de δ_i: $m_i = f(P'_i)$ et $M_i = f(P''_i)$ avec $P'_iP''_i < \eta$
En outre f est uniformement continue sur Δ, c'est à dire: $\forall \varepsilon' \in R^+ \;\; \exists \eta \in R^+ \quad P'P'' < \eta \Rightarrow |f(P') - f(P'')| < \varepsilon'$.
Pour la subdivision considérée on a donc:
$M_i - m_i = f(P''_i) - f(P'_i) < \varepsilon'$ d'où $S(d) - s(d) < \varepsilon' a$
En choisissant $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{a}$ on satisfait à la condition d'integrabilité.

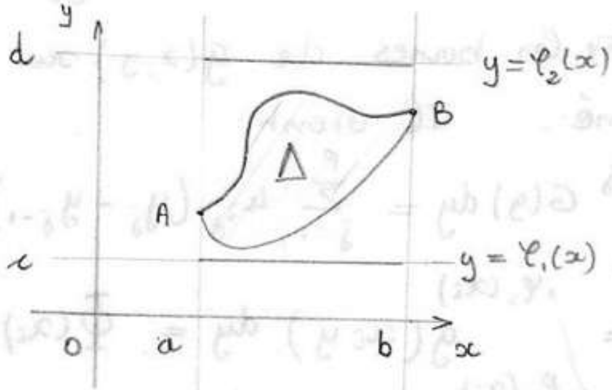
On demontre comme pour les integrales simples que si Δ est la reunion de 2 domaines quarrables adjacents Δ_1 et Δ_2:

$$\iint_\Delta f\,d\omega = \iint_{\Delta_1} f\,d\omega + \iint_{\Delta_2} f\,d\omega.$$

enfin l'ensemble $\mathfrak{F}$ des fonctions integrables sur Δ constitue un espace vectoriel sur R et l'application $f \longrightarrow \iint_\Delta f\,d\omega$ est linéaire.

132 <u>Formule de Fubini:</u>

Supposons f continue sur $\Delta \cup C$, (la continuite en tous points du contour C s'entend de façon unilatérale : le point M atteint C en restant interieur à Δ)



C etant un contour continu convexe, ou tout au moins rencontrant une parallele à Oy en deux points seulement.

Considerons le rectangle D de la figure et introduisons la fonction $g(x.y)$ egale à f en tout point de Δ et nulle à l'exterieur : g est integrable sur D puisqu'elle est integrable sur Δ et $D-\Delta$ séparement. On a $\underbrace{\iint_\Delta f\,d\omega}_{I} = \underbrace{\iint_D g\,d\omega}_{I_1}$.

Pour calculer I_1 decoupons D en domaine rectangulaire par les droites $x = x_i$ et $y = y_j$. D'apres le theorème de Darboux etendu aux intégrales doubles. I_1 est la limite quand $x_i - x_{i-1} \to 0$ et $y_j - y_{j-1} \to 0$ $\forall i$ de

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \mu_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - x_{i-1}) \sum_{j=1}^{p} \mu_{ij}(y_j - y_{j-1})\right]$$

μ_{ij} designant un nombre compris entre les bornes m_{ij} et M_{ij} de f sur le rectangle élementaire.

Considèrons la fonction de y seule $G(y) = g(x_i, y)$ et prenons pour μ_{ij} la valeur moyenne de $G(y)$ sur le segment $[y_{j-1}, y_j]$, c'est à dire :

$$\mu_{ij} = \frac{\int_{y_{j-1}}^{y_j} G(y)\,dy}{y_j - y_{j-1}}$$

μ_{ij} est bien comprise entre les bornes de $G(y)$ sur $[y_{j-1}\ y_j]$ et par suite entre les bornes de $g(x\,y)$ sur le rectangle élémentaire fermé. Il vient:

$$\int_c^d G(y)\,dy = \sum_{j=1}^{p} \int_{y_{j-1}}^{y_j} G(y)\,dy = \sum_{j=1}^{p} \mu_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

ou encore $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \mu_{ij}(y_j - y_{j-1}) = \int_{\varphi_1(x_i)}^{\varphi_2(x_i)} g(x_i\,y)\,dy = \Phi(x_i)$

I_1 est la limite quand $\sup (x_i - x_{i-1}) \to 0$ de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i)(x_i - x_{i-1})$ c'est à dire $\displaystyle\int_a^b \Phi(x)\,dx$

On note: $$\boxed{\iint_\Delta f\,d\omega = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\,dy}$$

ce qui autorise la notation:

$$\boxed{I = \iint_\Delta f\,dx\,dy}$$

133 Formule de Riemann

Soient $P(x.y)$ et $Q(x.y)$ deux fonctions admettant des dérivées P'_y et Q'_x continues sur $\Delta \cup C$. On a:

$$\iint_\Delta \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_a^b [P(x\,\varphi_2) - P(x\,\varphi_1)]\,dx$$

$$= \int_a^b P(x\,\varphi_2)\,dx - \int_a^b P(x, \varphi_1)\,dx$$

Représentons C par $x = x(t)$, $y = y(t)$. Le point $M(t)$ étant en A pour $t = t_0$ en B pour $t = t_1$ et revenant en A pour $t = t_2$. La représentation étant propre (sauf pour A) et le sens de parcours étant direct, sur C $P[x(t), y(t)]\, x'(t) = \mathcal{G}(t)$ et on a :

$$I = \int_{t_2}^{t_1} \mathcal{G}(t)\,dt - \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{G}(t)\,dt = -\int_{t_0}^{t_2} \mathcal{G}(t)\,dt$$

L'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{G}(t)\,dt$ qui ne dépend pas de la représentation propre choisie sur C se notte : $\int_{C_+} P\,dx$.

C'est une intégrale curviligne. De la même façon :

$$\iint_\Delta \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = +\int_{C_+} Q\,dy \,.$$ Finalement :

$$\boxed{\iint_\Delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{C_+} P\,dx + Q\,dy}$$

Cas particulier : Si $P = -y$ et $Q = x$

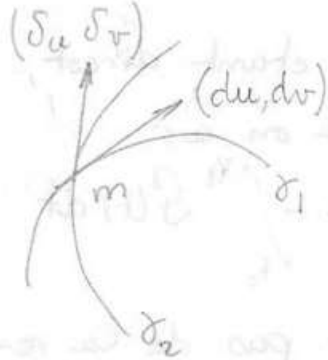
$$\boxed{\mathcal{A} = \iint_\Delta dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{C_+} x\,dy - y\,dx}$$

134 Jacobien :

Supposons qu'à tout point $m(u,v)$ d'un domaine δ du plan π corresponde un point $M(x.y)$ de Δ. La transformation étant biunivoque et les fonctions $x(u,v)$ et $y(u.v)$ admettent des dérivés partielles premières continues. Si m décrit une courbe γ, son transformé M décrit une courbe Γ dans Δ et l'on a :

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

Soient deux courbes γ_1 et γ_2 de δ se coupant en m. Nous appellerons $du\ dv$ les différentielles de u et v le long de γ_1, $\delta u\ \delta v$ les différentielles de u et v le long de γ_2



A γ_1 et γ_2 correspondent dans Δ Γ_1 et Γ_2 se coupant en M. Les tangentes en M sont dirigées par $d\vec{M}(dx, dy)$ $\delta\vec{M}(\delta x, \delta y)$, et :

$$\begin{pmatrix} dx & \delta x \\ dy & \delta y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} du & \delta u \\ dv & \delta v \end{pmatrix}$$

d'où pour les determinants correspondants :

$$\det(d\vec{M}, \delta\vec{M}) = J \times \det(d\vec{m}, \delta\vec{m})$$

avec $J = \det A = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$.

J est le <u>Jacobien</u> ou <u>determinant fonctionnel</u> de la transformation $m \xrightarrow{T} M$

NB: Le sens de $(d\vec{m}, \delta\vec{m})$ est determiné par le signe de $\det(d\vec{m}, \delta\vec{m})$. De même pour $(d\vec{M}, \delta\vec{M})$. Donc T conserve le sens des angles si $J > 0$, l'inverse si $J < 0$

Considerons deux transformations T et T' telles que $m(u,v) \xrightarrow{T} M(x,y)$ et $M(x,y) \xrightarrow{T'} P(X.Y)$. Le Jacobien de $T' \circ T$ est $\dfrac{D(X.Y)}{D(u,v)} = \dfrac{D(X.Y)}{D(x,y)} \times \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$

En effet :
$$\begin{pmatrix} X'_u & X'_v \\ Y'_u & Y'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_x & X'_y \\ Y'_x & Y'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}$$

En particulier : $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} \times \dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = 1$ (Jacobien de $T^{-1} \circ T$

135 <u>Changement de variable</u> :

Supposons les hypothèses precedentes verifiées sur un domaine S, contenant δ et ajoutons l'exis-

tence et la continuité, donc l'égalité de y''_{uv} et y''_{vu}.
$f(x,y)$ est supposé continue sur $\Delta \cup C$. Elle est donc continue par rapport à x. Par suite il existe $F(x,y)$ telle que $f = F'_x$ et $I = \iint_\Delta f\,dx\,dy = \iint_\Delta F'_x\,dx\,dy$.

Donc d'après la formule de Riemann: $I = \int_{C_+} F\,dy$

effectuons le changement de variable $x = x(u,v)$ et $y = y(u,v)$. Il vient: $I = \varepsilon \int_{\mathcal{C}_+} F.(y'_u\,du + y'_v\,dv)$ avec $\varepsilon J > 0$.

En appliquant à nouveau la formule de Riemann:

$$I = \int_{\mathcal{C}_+} F y'_u\,du + F y'_v\,dv = \varepsilon \iint_S f \times (x'_u y'_v - y'_u x'_v)\,du\,dv$$

En effet: $\dfrac{\partial(F y'_v)}{\partial u} - \dfrac{\partial(F y'_u)}{\partial v} = F'_u y'_v + \cancel{F y''_{uv}} - F'_v y'_u - \cancel{F y''_{uv}}$

$$= (F'_x x'_u + F'_y y'_u)\,y'_v - (F'_x x'_v + F'_y y'_v)\,y'_u$$

$$= F'_x (x'_u y'_v - y'_u x'_v) = f \times (x'_u y'_v - y'_u x'_v)$$

Donc $I = \varepsilon \iint_S f\,J\,du\,dv = \iint_S f\,|J|\,du\,dv$

<u>cas particulier</u>: Passage en coordonnées polaires.

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array}\right. \Longrightarrow J = \frac{D(x,y)}{D(\rho.\theta)} = \rho$$

d'où $\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,|\rho|\,d\rho\,d\theta$.

136 <u>Aire d'une surface courbe</u>:

L'aire A d'une surface polygonale d'un plan P et l'aire a de sa projection sur xoy sont liés par $a = \gamma A$ où γ est la troisième composante d'un vecteur $\vec{n}$

unitaires normal à P et dirigé vers le haut ($\gamma > 0$)

On généralise en définissant l'aire d'une portion de surface courbe projetée sur xoy suivant le domaine Δ par $\boxed{a = \iint \frac{dx\,dy}{\gamma}}$

Dans le cas ou la surface est donnée par le plan $z = f(xy)$, $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}}$ cf. ($dz = p\,dx + q\,dy$)

Mais il importe de vérifier que a depend seulement de la surface S et non du plan sur lequel on l'a projeté. Soit donc $\vec{M} = \vec{M}(u,v)$ une représentation paramétrique de S. On a: $\vec{n} = \varepsilon \frac{\vec{M'_u} \wedge \vec{M'_v}}{|\vec{M'_u} \wedge \vec{M'_v}|} = \varepsilon \frac{\vec{M'_u} \wedge \vec{M'_v}}{H}$

avec $\varepsilon \frac{D(x,y)}{D(u,v)} > 0$ puisque la troisième composante de $\vec{M'_u} \wedge \vec{M'_v}$ est $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$. Il en resulte que:

$\gamma = \frac{\varepsilon}{H} \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ et que $a = \iint_S \varepsilon\, H \frac{D(u,v)}{D(x,y)} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du\,dv$

D'ou vu les conditions sur ε:

$$\boxed{a = \iint_S H\,du\,dv}$$

137 Integrale de surface:

Étant donné la fonction $g(u,v)$, par définition $\iint_S g\,d\sigma = \iint_S g\,H\,du\,dv$. Cette expression est independante du paramétrage de S. En effet si $u = u(\lambda,\mu)$ et $v = v(\lambda,\mu)$: $\vec{M'_u} \wedge \vec{M'_v} = (\vec{M'_\lambda} \wedge \vec{M'_\mu}) \frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}$ (ref: à une composante) et $H = \left| \frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)} \right| H_1$

d'où $\iint_S g\,H\,du\,dv = \iint_{S_1} g\,H_1 \left| \cancel{\frac{D(\lambda,\mu)}{D(u,v)}} \right| \left| \cancel{\frac{D(u,v)}{D(\lambda,\mu)}} \right| d\lambda\,d\mu$

138 Formule de Stokes

Soit C une courbe fermée, sans points doubles, tracée une surface S et C_1 sa projection sur xOy. Soit $\vec{V}(r)$ une fonction vectorielle admettant des dérivées partielles continues sur S. Appelons $P\ Q\ R$ les composantes de $\vec{V}(r)$ et représentons S par $z = \varphi(x, y)$.

$$\int_C P\,dx = \int_{C_1} P[x, y, \varphi(x,y)]\,dx$$

Supposons C_1 décrite dans le sens direct, alors :

$$\int_{C_1} P(x, y, \varphi(x,y))\,dx = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Or si $\vec{n}(\alpha\beta\gamma)$ désigne le vecteur unitaire de la normale à S en M dirigé vers le haut : $\dfrac{\alpha}{\varphi'_x} = \dfrac{\beta}{\varphi'_y} = \dfrac{\gamma}{-1}$

d'où $$\int_C P\,dx = -\iint_S (\gamma P'_y - \beta P'_z)\,\frac{dx\,dy}{\gamma} = \iint_S (\beta P'_z - \gamma P'_y)\,d\sigma$$

Le sens de parcours sur C étant direct par rapport au sens choisi pour $\vec{n}$.

En calculant de même $\int Q\,dy$ et $\int R\,dz$ il vient :

$$\boxed{\int_C R\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left[\alpha(R'_y - Q'_z) + \beta(P'_z - R'_x) + \gamma(Q'_x - P'_y)\right] d\sigma}$$

139 Intégrales triples.

Soit une surface continue, sans points doubles, de l'espace euclidien, limitant un domaine Δ. On considère l'ensemble e des volumes des polyèdres contenu dans Δ et l'ensemble E des polyèdres contenant Δ. Δ est dit cubable si e et E sont adjascents. Son volume V est la borne commune à e et E.

ceci posé, la théorie de l'intégrale triple se développe comme celle de l'intégrale double. (cubable remplaçant quarrable et volume remplaçant aire).

Il y a deux formules de Foubini:

$$\iiint_\Delta f\,dv = \iint_S dx\,dy \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\,dz = \int_a^b dx \iint_{S_x} f\,dy\,dz$$

En coordonnées cylindriques: (semi polaires)

$$\iiint_\Delta f\,dv = \int_c^d dz \iint_{S_z} f\,dx\,dy = \int_c^d dz \iint_{D_z} f\,|r|\,dr\,d\varphi$$

En coordonnées sphériques: (polaires)

$$\iiint_\Delta f\,dv = \iiint_D f\,|r|\,dr\,d\varphi\,dz = \int_\alpha^\beta d\varphi \iint f\,|r|\,dr\,dz$$

$$= \int_\alpha^\beta d\varphi \iint_{D_\varphi} f\rho^2|\cos\theta|\,d\rho\,d\theta = \iiint f\rho^2|\cos\theta|\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

140 <u>Formule d'Ostrogradski:</u>

En opérant comme pour la formule de Riemann:

$$\iiint_\Delta \frac{\partial R}{\partial z}\,dv = \iint_S R(x,y,\varphi_2)\,d\omega - \iint_S R(x,y,\varphi_1)\,d\omega$$

$$= \iint_{S_2} R\gamma\,d\sigma - \iint_{S_1} R\gamma\,d\sigma$$

$\vec{n}$ étant sur S_1 et S_2 dirigé vers le haut, mais si $\vec{n}$ est maintenant dirigé, vers l'extérieur de la surface, la formule devient

$$\iint_{S_2} R\gamma\,d\sigma + \iint_{S_1} R\gamma\,d\sigma = \iint_S R\gamma\,d\sigma$$

On procédant de même pour P'_x et Q'_y il vient:

$$\boxed{\iiint_\Delta (P'_x + Q'_y + R'_z)\,dv = \iint_S (P\alpha + Q\beta + R\gamma)\,d\sigma}$$

141 <u>Interpretation vectorielle.</u>

f étant une fonction de M, pourvue des dérivées nécessaires on pose $\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, f = f'_x \vec{\imath} + f'_y \vec{\jmath} + f'_z \vec{k}}$

De même $\vec{V}(M)$ étant une fonction vectorielle de M on pose $\boxed{\text{div}\, \vec{V} = P'_x + Q'_y + R'_z}$

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} = (R'_y - Q'_z)\vec{\imath} + (P'_z - R'_x)\vec{\jmath} + (Q'_x - P'_y)\vec{k}}$$

Ces éléments sont indépendants du repère orthonormé direct choisi : Pour le vérifier il suffit de considérer une rotation du trièdre de référence et d'expliciter le changement de repère. (Par exemple pour $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$:

$$x = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta$$
$$y = \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta$$
$$z = \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta$$

f devient $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$. Les nouvelles composantes de $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ sont

$$\alpha_1 f'_x + \beta_1 f'_y + \gamma_1 f'_z$$
$$\alpha_2 f'_x + \beta_2 f'_y + \gamma_2 f'_z$$
$$\alpha_3 f'_x + \beta_3 f'_y + \gamma_3 f'_z$$

Ce sont précisément φ'_ξ, φ'_η, φ'_ζ)

Avec ces notations, les formules de Stokes et d'Ostrogradski s'écrivent :

$$\text{I} \quad \boxed{\int_C \vec{V}\, d\vec{M} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma}$$

$$\text{II} \quad \boxed{\iint_S \vec{V}\, \vec{n}\, d\sigma = \iiint_\Delta (\text{div}\, \vec{V})\, dv}$$

(I) est l'expression de la <u>circulation</u> de $\vec{V}$ le long de C

(II) est l'expression du flux de $\vec{V}$ à travers S.

142 Potentiel scalaire

Pour qu'un vecteur $\vec{V}(M)$ continuement differentiable sur un pavé fermé D soit un gradient il faut et il suffit que $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} = \vec{0}$ $\forall M \in D$. La condition est necessaire car $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\, f) = \vec{0}$. (reference aux composantes). Pour montrer qu'elle est suffisante donnons nous $\vec{V}(M)$ tel que $\overrightarrow{\text{rot}}\, V = \vec{0}$ et cherchons f solution du systeme :

$$\text{(I)} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = P$$

$$\text{(II)} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q$$

$$\text{(III)} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R$$

L'hypothese $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} = \vec{0}$ se traduit par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

De (I) on tire $f = \displaystyle\int_{x_0}^{x} P(\lambda, y, z)\, d\lambda + \varphi(y, z)$

D'où

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}(\lambda, y, z)\, d\lambda + \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial \lambda}(\lambda, y, z)\, d\lambda + \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$= Q(x\, y\, z) - Q(x_0\, y\, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

(II) Donne alors $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x_0\, y\, z)$ et

$$\varphi = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, \mu\, z)\, d\mu + \psi(z)$$

On en tire $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial z}(\lambda\, y\, z)\, d\lambda + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial z}(x_0 \mu z)\, d\mu + \psi'$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial R}{\partial \lambda}(\lambda\, y\, z)\, d\lambda + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial R}{\partial \mu}(x_0\, \mu\, z)\, d\mu + \varphi'(z)$$

$$= R(x y z) - R(x_0 y z) + R(x_0 y z) - R(x_0 y_0 z) + \varphi'_z$$

$$= R(x y z)$$

D'où $\varphi'_z = R(x_0 y_0 z)$

$$\varphi = \int_{z_0}^{z} R(x_0 y_0 \nu)\, d\nu + C$$

f est déterminé à une constante additive près.

f est la fonction de champ.

NB : (En physique on appelle généralement potentiel la fonction $-f$)

143 Circulation conservative :

Si $V(M)$ est un gradient considérons deux points M_0 M et un arc orienté C joignant M_0 à M : on a

$$\int_C \vec{V}\, d\vec{M} = \int_C df = f(M) - f(M_0)$$

cette intégrale dépend seulement de M et M_0 et non de C. On dit que le champ $V(M)$ est à circulation conservative.

Inversement si $V(M)$ est à circulation conservative on peut définir une fonction f par :

$$f(M) - f(M_0) = \int_{M_0 M} \vec{V}(\mu)\, d\vec{\mu}.$$

Prenons pour M le point $(x y_0 z_0)$ M_0 étant $(x_0 y_0 z_0)$ et prenons pour arc M_0M le segment M_0M : on a alors

$$f(M) - f(M_0) = \int_{x_0}^{x} P(\lambda\, y_0 z_0)\, d\lambda$$

et $\frac{\partial f}{\partial x} = P$. De même $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ $\frac{\partial f}{\partial z} = R$

V est donc le gradient de f.

144 Potentiel vecteur

Pour qu'un vecteur V_M continuement differentiable sur un pavé fermé D soit un rotationnel il faut et il suffit que $\mathrm{div}\,\vec{V} = 0$ quel que soit $M \in D$.

La condition est necessaire car $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}\, w}) = 0$

Pour montrer qu'elle est suffisante, cherchons P_1 Q_1 R_1 tel que

$$\left.\begin{aligned} &(I)\ \frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} = P \\ &(II)\ \frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} = Q \\ &(III)\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = R \end{aligned}\right\} \text{ avec } \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

Cherchons une solution particulière en prenant $Q_1 = 0$

De (I) et (III) on tire: $R_1 = \int_{y_0}^{y} P(x\,\mu\,z)\,d\mu + \varphi(x,z)$

et $P_1 = -\int_{y_0}^{y} R(x\,\mu\,z)\,d\mu + \psi(x,z)$. En portant dans

$$(II)\ -\int_{y_0}^{y}\left[\frac{\partial R}{\partial z}(x\,\mu\,z) + \frac{\partial P}{\partial x}(x\,\mu\,z)\right]d\mu + \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

compte tenu de (4) : $\int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial \mu}(x, \mu, z)\,d\mu + \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = Q$

et $\cancel{Q(x y z)} - Q(x_0\, y_0\, z) + \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{d\varphi}{\partial x} = \cancel{Q(x y z)}$

Choisissons $\varphi = 0$: $\psi = \int_{z_0}^{z} Q(x.\,y_0\,v)\,dv$

On obtient ainsi une solution $\vec{w}_0(M)$

Toute autre solution $\vec{W}_{(M)}$ satisfait à $\mathrm{rot}(\vec{W} - \vec{W}_0) = \vec{0}$.

$\vec{W} - \vec{W}_0$ est un gradient arbitraire.

$\vec{W}$ est dit <u>potentiel vecteur</u> du champ $\vec{V}(M)$

145 Flux conservatif:

Si $V(M)$ est un rotationnel, considerons un contour C et deux portions de surface S_1 et S_2 limitées à C.

On orientant C et les normales à S_1 et S_2 dans des sens correspondant :

$$\iint_{S_1} \vec{V}\,\vec{n}\,d\sigma - \iint_{S_2} \vec{V}\,\vec{n}\,d\sigma = \iiint_{\Delta} (\operatorname{div} \vec{V})\,dv = 0$$

et
$$\iint_{S_1} \vec{V}\,\vec{n}\,d\sigma = \iint_{S_2} \vec{V}\,\vec{n}\,d\sigma$$

Le flux de $\vec{V}$ à travers une portion de surface limitée à C, ne dépend que du contour C : il est <u>conservatif</u>.

Inversement si $\vec{V}$ est un champ à flux conservatif il vérifie :

$$\iiint_{\Delta} (\operatorname{div} \vec{V})\,dv = 0 \quad \forall \Delta \subseteq D$$

Si en un point de D on avait $(\operatorname{div} \vec{V}) \neq 0$ il existerait une boule Δ_0 de D sur laquelle $\operatorname{div} \vec{V}$ aurait un signe constant, et : $\iiint_{\Delta_0} (\operatorname{div} \vec{V})\,dv \neq 0$ ce qui est contradictoire.

$(\operatorname{Div} \vec{V})$ est donc nulle en tout point intérieur à D.

$\vec{V}$ est un rotationnel.

146 <u>Centres d'inertie</u> :

Sur un domaine cubable de point générique P Définissons une fonction continue $u(P)$ à valeur dans R^+

Δ devient un <u>continu matériel</u> de dimension 3.

u est la <u>masse spécifique</u> de Δ en P. La masse d'une partie cubable S de Δ est par définition :

$$\boxed{m(S) = \iiint_S u\,dv} \quad \text{en particulier} \quad M = m(\Delta) = \iiint_\Delta u\,dv.$$

Soit P un point donné de Δ et S une partie cubable de Δ contenant P, ℓ son diamètre, m sa masse et v son volume. D'après la formule de la moyenne (dont la démonstration s'étend aux intégrales multiples) il existe un point Q de S tel que $m = \mu(Q)\,v$.

μ étant continue :

$$\forall \varepsilon \in R^+ \; \exists \eta \in R^+ \quad \rho < \eta \Rightarrow |\mu(Q) - \mu(P)| < \varepsilon$$

ce qui montre que $\frac{m}{v} \to \mu(P)$ quand $\rho \to 0$.

Lorsque n points A_i sont affectés de coefficients m_i de R^+ on les dit matériels. m_i est la masse de A_i. Le barycentre G des A_i est le centre d'inertie des A_i.

On sait que O étant un point quelconque de l'espace et si $M = \sum_1^n m_i > 0$: $M\,\overrightarrow{OG} = \sum_1^n m_i\,\overrightarrow{OA_i}$

Par extension le centre d'inertie d'un continu matériel sera défini par $M\,\overrightarrow{OG} = \iiint_\Delta \overrightarrow{OP}\,\mu\,dv$

(On voit immédiatement que G ne dépend pas de O)

On définit de la même façon les éléments d'inertie d'une plaque ou d'un fil (continu matériel à deux ou une dimension) en remplaçant les intégrales triples par des intégrales de surface ou des intégrales curvilignes.

147 Moment d'inertie.

Étant donné un solide constitué de n points matériels A_i de masse m_i on appelle moment d'inertie de ce solide par rapport à un point O, une droite Δ, ou un plan P, l'expression: $\boxed{I = \sum_1^n m_i\, r_i^2}$ où r_i désigne la distance de A_i à O, Δ ou P.

Le repère $Oxyz$ étant orthonormé on a immédiatement:

$$I_O = I_{xOy} + I_{yOz} + I_{zOx}$$

$$I_{Oz} = I_{xOz} + I_{yOz}$$

$$I_O = \frac{1}{2}\left(I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz}\right)$$

Si $G(xyz)$ est un repère orthonormé ayant pour origine le centre d'inertie du solide et si D est la droite d'equation $D \left| \begin{array}{l} y=0 \\ x=a \end{array}\right.$

$$I_D = \sum_1^n m_i\left[(x_i-a)^2 + y_i^2\right] = \sum_1^n m_i(x_i^2+y_i^2) + a^2\sum_1^n m_i - 2a\sum_1^n m_i x_i$$

$$\boxed{I_D = I_{Gz} + Ma^2} \qquad \text{(Huyghens)}$$

On étend la définition du moment d'inertie à un solide materiel continu Δ en posant:

$$\boxed{I = \iiint_\Delta r^2 \mu \, dv}$$

Les relations obtenues subsistent.

148 Champs centraux.

Un champ $\vec{V}(M)$ est dit *central* s'il existe un point O tel que $\vec{V}(M)$ soit colineaire à OM. Si $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de OM, $\vec{V}(M) = f(M)\,\vec{u}$

En coordonnées polaires d'origine O:

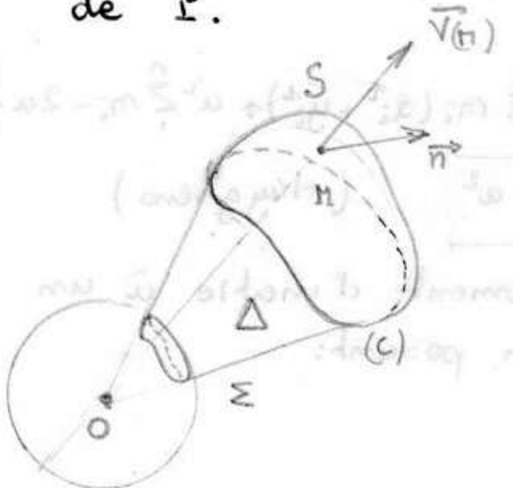
$$\vec{V}\,d\vec{M} = f\vec{u}\,(\rho\, d\vec{u} + \vec{u}\, d\rho) = f.d\rho$$

Pour que $\vec{V}(M)$ soit un champ de gradient, il faut et il suffit que $\vec{V}\,d\vec{M}$ soit une différentielle totale, donc que f soit fonction de ρ seule.

150 Angles solides:

Considerons une surface S limitee a un contour fermé C et supposons que quel que soit $M \in S$ OM ne recoupe pas S. Orientons la normale $\vec{n}$ en M

à S de façon que l'angle θ $(\vec{n}, \vec{OM})$ soit aigu.
Soit P l'intersection de la demi droite OM avec la sphère de centre O et de rayon 1, et Σ le lieu de P.



Posons $\rho = OM$

$$\omega = \iint \frac{\cos\theta}{\rho^2}\, d\sigma$$

D'où $$\omega = \iint_S \frac{\vec{OM}}{\rho^3}\, \vec{n}\, d\sigma$$

ω est le flux du vecteur $\dfrac{\vec{OM}}{\rho^3}$ à travers S, or d'après le paragraphe précédent $\vec{V}_M$ est un gradient. Soit Δ le domaine compris entre S et Σ et intérieur au cone de sommet O et de directrice C.

Le flux de $\vec{V} = \dfrac{\vec{OM}}{\rho^3}$ à travers la surface conique qui limite Δ est nul : le flux de $\vec{V}$ à travers Σ est $\iint_\Sigma d\sigma = \sigma$. Donc selon ostrogradski

$$\omega - \sigma = 0 \qquad \text{et} \qquad \boxed{\omega = \sigma}$$

ω est l'angle solide de S relativement à O : pour l'évaluer on pourra calculer σ

151 Vitesse aréolaire :

Considérons un point mobile $M(t)$ et supposons que son accélération $\vec{\gamma}$ soit colinéaire à $\vec{OM}$: $\vec{V}$ désignant la vitesse de M, posons $\vec{G} = \vec{OM} \wedge \vec{V}$ (moment du vecteur vitesse au point O ou moment cinétique).

On a :

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{\gamma} + \vec{V} \wedge \vec{V} = \vec{0}$$

Donc $\vec{G}$ est fixe.

* Si $\vec{G} = \vec{0}$, $\vec{v}$ est constamment colinéaire à $\vec{OM}$. Soit M_0 et $\vec{V_0}$ la position et la vitesse de M à l'instant t_0:
Dans un repère $Oxyz$, $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}$. En intégrant il vient $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$. La trajectoire est portée par une droite issue de O

* Si $\vec{G} \neq \vec{0}$, M se déplace dans le plan perpendiculaire en O à $\vec{G}$: en coordonnées polaires dans ce plan.

$$2\rho'\theta' + \rho\theta'' = 0 \qquad \text{donc} \quad \rho^2\theta' = \text{cte}$$

Or si $\mathcal{A}(t)$ désigne l'aire balayée par $\vec{OM}$ entre les instants t_0 et t: $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\theta'$

$\frac{d\mathcal{A}}{dt}$ s'appelle la <u>vitesse aréolaire</u> de M. Elle est constante et réciproquement si $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \text{cte}$ l'accélération est centrale.

$\mathcal{A}$ est une fonction linéaire de $t - t_0$. On dit que le mouvement suit la loi des Aires

---

Complément I.

Demonstration du théorème de D'Alembert.

① Lemme: Soit $P(z) = \sum_0^n a_i z^i$ un polynôme sur C. Si $P(z_0)$ est différent de 0, il existe des valeurs z_1 aussi voisine de z_0 qu'on le veut pour lesquelles $|P(z_1)| < |P(z_0)|$. On peut supposer $z_0 = 0$, sinon on pose $z = z_0 + Z$. On a donc $a_0 \neq 0$. Ecrivons:

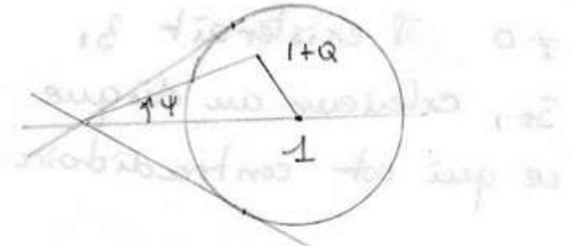
$$P(z) = a_0 \left[1 + \frac{a_p}{a_0} z^p (1 + Q(z)) \right]$$

a_p étant le second coefficient non nul, et soit r et α le module et l'argument de z. Si $r<1$, et si k désigne le maximum des modules des coefficients de Q;

$$|Q(z)| = \left| \frac{a_{p+1}}{a_p} z + \cdots + \frac{a_n}{a_p} z^{n-p} \right| < (n-p) k r$$

Si on prend $r < \frac{1}{2(n-p)k}$ il vient $|Q(z)| < \frac{1}{2}$

D'où $\frac{1}{2} < |1 + Q(z)| < \frac{3}{2}$. On peut choisir $\psi = \arg[1+Q($ de sorte que $-\frac{\pi}{6} < \psi < \frac{\pi}{6}$ et $|\psi| < \frac{\pi}{6}$

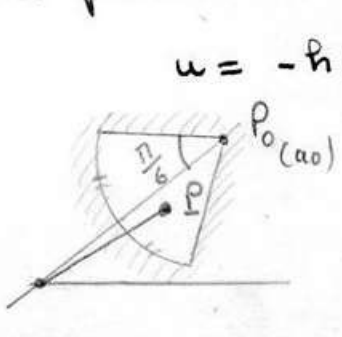


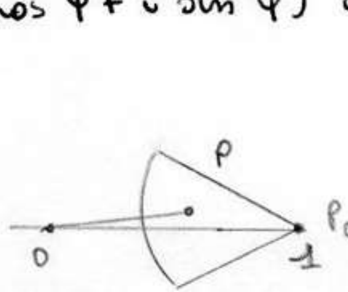
Posons: $\left|\frac{a_p}{a_0}\right| = \mu$ $\arg \frac{a_p}{a_0} = \varphi_0$

$|1 + Q(z)| = \lambda$

L'expression $u = \frac{a_p}{a_0} z^p [1 + Q(z)]$ a pour module $\lambda \mu r^p$ et l'un de ses arguments est $\varphi_0 + \psi + p\alpha$. Choisissons r assez petit pour que $\lambda \mu r^p < \frac{3}{2} \mu r^p < \frac{1}{2}$ soit $r^p < \frac{1}{3\mu}$ et prenons $\alpha = \frac{\pi - \varphi_0}{p}$. u sera de la forme:

$$u = -h(\cos\psi + i \sin\psi) \text{ avec } h < \tfrac{1}{2}$$





$OP < OP_0$. On a bien trouvé des valeurs de z pour lesquelles $|P(z)| < |P(z_0)|$.

(11) Démonstration du théorème :

Si $a_0 = 0$ le théorème est trivial.

Si $a_0 \neq 0$ on peut trouver R tel que $|P(R_\alpha)| > |a_0|$

En effet $P(z) = a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{z} + \cdots + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{z^n}\right)$ et

si $M = \sup \left|\frac{a_j}{a_n}\right|$ en prenant $R > 2M + 1$ il vient :

$$|P(z)| > |a_n| R^n \left(1 - M \frac{1 - \frac{1}{R^n}}{R-1}\right)$$

$$|P(R_\alpha)| > |a_n| R^n \left(1 - \frac{M}{R-1}\right) > \frac{1}{2}|a_n| R^n$$

Il suffit d'assurer $R^n > 2\left|\frac{a_0}{a_n}\right|$

R étant ainsi défini, $P(z)$ est une fonction continue des 2 variables (x, y) sur le disque fermé $x^2 + y^2 \leq R^2$

Il en est de même de $|P(z)|$. $|P(z)|$ atteint donc son minimum en un point z_0 de ce disque, et, comme le minimum est inférieur ou égal à $|P(0)| = |a_0|$ le minimum n'est certainement atteint en un point de la frontière : z_0 est donc strictement intérieur au disque.

D'après le lemme si $|P(z_0)| \neq 0$ il existerait z_1 arbitrairement voisin de z_0, extérieur au disque tel que $|P(z)| < |P(z_0)|$ ce qui est contradictoire.

z_0 est donc racine de P.

Complements II

Bibliographie.

* **Bourbaki**: "Elements de Mathematiques"
  Topologie generale (Hermann)

Pisot - Zamansky. "Mathematiques generales" (Dunod)

Lichnerowicz: "Algebre et Analyse Lineaire" (Masson)
NB: § Integrales multiples

Valiron: "Cours d'Analyse" (Masson)
Theorie des fonctions.
Equations fonctionnelles et Applications

Garnier: Cinematique (Gauthier - Villars)
Tome I
Tome II : (Roulements et girations)
